Sujet d'entraînement n°4

Exercice 13

On considère la suite (u_n) définie par $u_0 = 1$, et pour tout entier naturel n, $\quad u_{n+1} = e \times \sqrt{u_n}$

1. Démontrer par récurrence que, pour tout entier naturel n, $\quad 1 \leq u_n \leq e^2$

2. a. Démontrer que la suite (u_n) est croissante.
b. En déduire la convergence de la suite (u_n)

3. Pour tout entier naturel n, on pose $\quad v_n = \ln(u_n) - 2$.
a. Démontrer que la suite (v_n) est géométrique de raison $\frac{1}{2}$.
b. Démontrer que, pour tout entier naturel n, $\quad v_n = -\dfrac{1}{2^{n-1}}$
c. En déduire une expression de u_n en fonction de l'entier naturel n.
d. Calculer la limite de la suite (u_n)

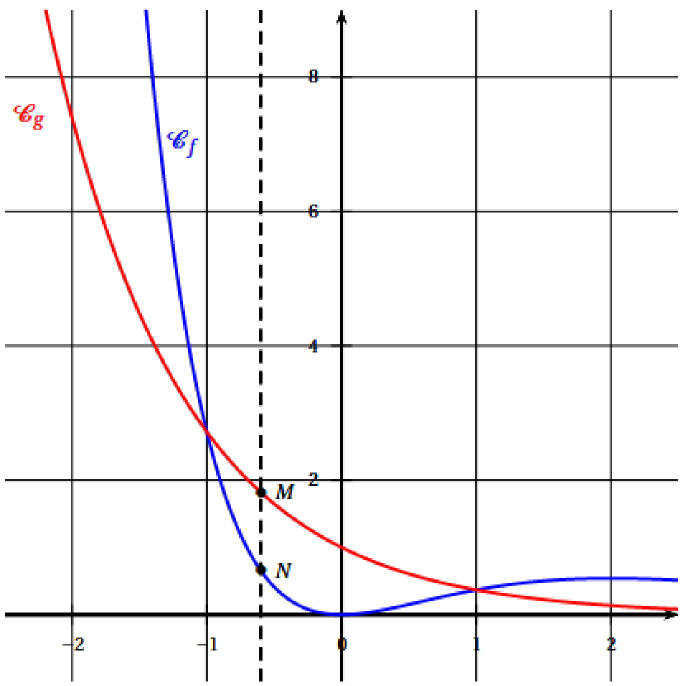
4. Dans cette question, on s'interroge sur le comportement de la suite (u_n) si l'on choisit d'autres valeurs que 1 pour u_0. Pour chacune des affirmations ci-dessous, indiquer si elle est vraie ou fausse en justifiant.

Affirmation 1 : « Si $u_0 = 2018$, alors la suite (u_n) est croissante. »

Affirmation 2 : « Si $u_0 = 2$, alors pour tout entier naturel n, $1 \leq u_n \leq e^2$ »

Affirmation 3 : « La suite (u_n) est constante si et seulement si $u_0 = 0$. »

Exercice 14



Le graphique ci-contre représente, dans un repère orthogonal, les courbes $\mathcal{C}_f$ et $\mathcal{C}_g$ des fonctions f et g définies sur $\mathbb{R}$ par :

$f(x) = x^2 e^{-x}$ et $\quad g(x) = e^{-x}$

La question 3 est indépendante des questions 1 et 2.

1. a. Déterminer les coordonnées des points d'intersection de $\mathcal{C}_f$ et $\mathcal{C}_g$.

b. Étudier la position relative des courbes $\mathcal{C}_f$ et $\mathcal{C}_g$.

2. Pour tout nombre réel x de l'intervalle $[-1\ ;\ 1]$, on considère les points M de coordonnées $(x\ ;\ f(x))$ et N de coordonnées $(x\ ;\ g(x))$, et on note $d(x)$ la distance MN.
On admet que : $d(x) = e^{-x} - x^2 e^{-x}$.

On admet que la fonction d est dérivable sur l'intervalle $[-1\ ;\ 1]$ et on note d' sa fonction dérivée.

a. Montrer que $d'(x) = e^{-x}(x^2 - 2x - 1)$.

b. En déduire les variations de la fonction d sur l'intervalle $[-1\ ;\ 1]$.

c. Déterminer l'abscisse commune x_0 des points M_0 et N_0 permettant d'obtenir une distance $d(x_0)$ maximale, et donner une valeur approchée à 0, 1 près de la distance M_0N_0.

3. Soit Δ la droite d'équation $y = x + 2$.
On considère la fonction h dérivable sur $\mathbb{R}$ et définie par : $h(x) = e^{-x} - x - 2$.
En étudiant le nombre de solutions de l'équation $h(x) = 0$, déterminer le nombre de points d'intersection de la droite Δ et de la courbe $\mathcal{C}_g$.

Exercice 15

Une épreuve de culture générale consiste en un questionnaire à choix multiple (QCM) de vingt questions. Pour chacune d'entre elles, le sujet propose quatre réponses possibles, dont une seule est correcte. À chaque question, le candidat ou la candidate doit nécessairement choisir une seule réponse. Cette personne gagne un point par réponse correcte et ne perd aucun point si sa réponse est fausse.

On considère trois candidats :

• Anselme répond complètement au hasard à chacune des vingt questions.
Autrement dit, pour chacune des questions, la probabilité qu'il réponde correctement est égale à $\frac{1}{4}$;

• Barbara est un peu mieux préparée. On considère que pour chacune des vingt questions, la probabilité qu'elle réponde correctement est de $\frac{1}{2}$;

• Camille fait encore mieux : pour chacune des questions, la probabilité qu'elle réponde correctement est de $\frac{2}{3}$.

1. On note X, Y et Z les variables aléatoires égales aux notes respectivement obtenues par Anselme, Barbara et Camille.

a. Quelle est la loi de probabilité suivie par la variable aléatoire X ? Justifier.

b. À l'aide de la calculatrice, donner l'arrondi au millième de la probabilité $P(X \geq 10)$.

Dans la suite, on admettra que $P(Y \geq 10) \approx 0{,}588$ et $P(Z \geq 10) \approx 0{,}962$.

2. On choisit au hasard la copie d'un de ces trois candidats.

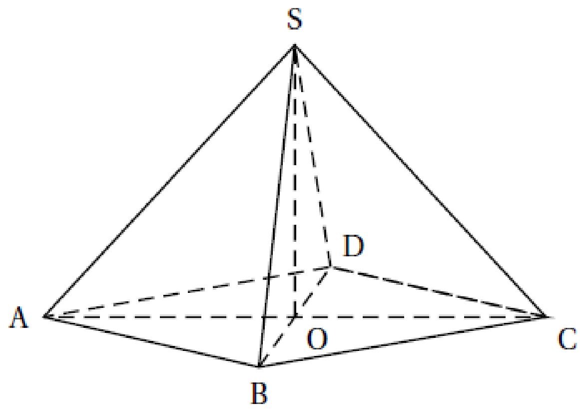
On note A, B, C et M les évènements :

• A : « la copie choisie est celle d'Anselme » ;
• B : « la copie choisie est celle de Barbara » ;
• C : « la copie choisie est celle de Camille » ;
• M : « la copie choisie obtient une note supérieure ou égale à 10 ».

On constate, après l'avoir corrigée, que la copie choisie obtient une note supérieure ou égale à 10 sur 20. Quelle est la probabilité qu'il s'agisse de la copie de Barbara?
On donnera l'arrondi au millième de cette probabilité.

Exercice 16

Partie A : un calcul de volume sans repère



On considère une pyramide équilatère $SABCD$ (pyramide à base carrée dont toutes les faces latérales sont des triangles équilatéraux) représentée ci-contre.
Les diagonales du carré $ABCD$ mesurent 24 cm. On note O le centre du carré $ABCD$.
On admettra que $OS = OA$.

1. Sans utiliser de repère, démontrer que la droite (SO) est orthogonale au plan (ABC).

2. En déduire le volume, en cm3, de la pyramide SABCD.

Partie B : dans un repère

On considère le repère orthonormé $(O\ ;\ \overrightarrow{OA}\ ;\ \overrightarrow{OB}\ ;\overrightarrow{OS})$

1. On note P et Q les milieux respectifs des segments $[AS]$ et $[BS]$.

a. Justifier que $\vec{n}\,(1\ ;\ 1\ ;\ -3)$ est un vecteur normal au plan (PQC).

b. En déduire une équation cartésienne du plan (PQC).

2. Soit H le point du plan (PQC) tel que la droite (SH) est orthogonale au plan (PQC).

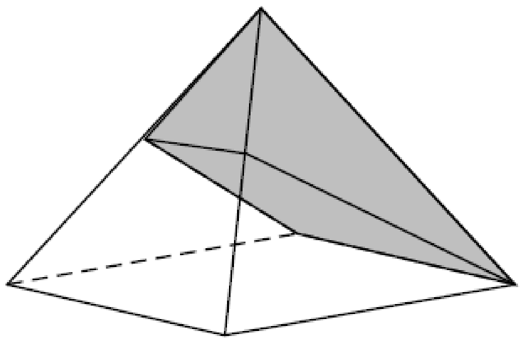
a. Donner une représentation paramétrique de la droite (SH).

b. Calculer les coordonnées du point H.

c. Montrer alors que la longueur SH, en unité de longueur, est $\dfrac{2\sqrt{11}}{11}$

3. On admettra que l'aire du quadrilatère $PQCD$, en unité d'aire, est égale à $\dfrac{3\sqrt{11}}{8}$
Calculer le volume de la pyramide $SPQCD$, en unité de volume

Partie C : partage équitable



Pour l'anniversaire de ses deux jumelles Anne et Fanny, Madame Nova a confectionné un joli gâteau en forme de pyramide équilatère dont les diagonales du carré de base mesurent 24 cm.

Elle s'apprête à le partager en deux, équitablement, en plaçant son couteau sur le sommet. C'est alors qu'Anne arrête son geste et lui propose une découpe plus originale :
« Place la lame sur le milieu d'une arête, parallèlement à un côté de la base, puis coupe en te dirigeant vers le côté opposé ».

Fanny a des doutes, les parts ne lui semblent pas équitables.
Est-ce le cas ? Justifier la réponse.