

Corrigés Savoirs Fc. 1

Corrigé Exercice 1

Fonction f : définie sur $[-3; 3]$; continue sur $[-3; 3]$ et dérivable sur $[-3; -2[\cup] - 2; 3]$ (car non dérivable en -2)

Fonction g : définie sur $[-3; 3]$; continue sur $[-3; 1[\cup] 1; 3]$ (car non continue en 1) et par conséquent dérivable sur $[-3; 1[\cup] 1; 3]$

Fonction h : définie sur $[-3; 3]$; continue sur $[-3; 3]$ et dérivable sur $] - 3; 1, 5[\cup] 1, 5; 3]$

Fonction i : définie sur $[-3; 0] \cup [1; 3]$; continue sur $[-3; 0] \cup [1; 3]$ et dérivable sur $[-3; 0] \cup [1; 3]$

Corrigé Exercice 2

1) a) sur $[-7; -2]$:

- f est **continue**

- f est **strictement croissante**

- on a $3 \in [f(-7); f(-2)]$

D'après le théorème des valeurs intermédiaires, l'équation

$f(x) = 3$ a donc une seule solution sur $[-7; -2]$

sur $[-2; 1]$:

on a $f(x) > 3$

donc $3 \notin [f(-2); f(1)]$

donc l'équation $f(x) = 3$ n'admet pas de solution sur $[-2; 1]$

sur $[1; 4]$:

- f est **continue**

- f est **strictement décroissante**

- on a $3 \in [f(4); f(1)]$

D'après le théorème des valeurs intermédiaires,

l'équation $f(x) = 3$ a donc une seule solution sur $[1; 4]$

L'équation $f(x) = 3$ a donc **en tout deux solutions** : $\alpha \in] - 7; -2[$ et $\beta \in] 1; 4[$.

b) sur $[-7; -2]$:

- f est **continue**

- f est **strictement croissante**

- on a $-2 \in [f(-7); f(-2)]$

D'après le théorème des valeurs intermédiaires,

l'équation $f(x) = -2$ a donc une seule solution sur $[-7; -2]$

sur $[-2; 1]$:

on a $f(x) > -2$

Donc l'équation $f(x) = -2$ n'admet pas de solution sur $[-2; 1]$

sur $[1; 4]$:

on a $f(x) > -2$

Donc l'équation $f(x) = -2$ n'admet pas de solution sur $[1; 4]$

Donc au final l'équation $f(x) = -2$ **n'a qu'une seule solution, qui se situe dans l'intervalle $] - 7; -2[$** .

c) L'ensemble des solutions de l'équation $f(x) = 4$ est $S = [-2; 1]$, car f est constante et égale à 4 sur cet intervalle.

d) f est continue sur $[-7; 2]$ mais pour tout $x \in [-7; 4]$, on a $f(x) \geq -3$ donc l'ensemble des solutions de l'équation $f(x) = -6$ est $S = \emptyset$.

2) a) $e^{0,4} - 2 \simeq -0,5$ donc $f(2) < 2$.

Il n'y a pas de solution sur l'intervalle $[0; 2]$

f est **continue et strictement décroissante** sur $[-10; 0]$, avec $2 \in [f(-10); f(0)]$

D'après le **théorème des valeurs intermédiaires**, l'équation $f(x) = 2$ admet une **unique solution** α sur l'intervalle $[-10; 1]$.

b) à la calculatrice, par balayages successifs, on trouve : $\alpha \simeq -3,72$

1) a) La fonction f est **continue et strictement croissante** sur $[0; 5]$, avec $9 \in [f(0); f(5)]$

D'après le **théorème des valeurs intermédiaires**, l'équation $f(x) = 9$ admet une **unique solution** α sur l'intervalle $[0; 5]$.

b) Par balayage, on trouve : $\alpha \simeq 0,65$

Corrigé Exercice 3

1) a) $f(0) = 1$ et $f(1) = 1 - 3 + 1 = -1$.

b) On a $f'(x) = 3x^2 - 6x = 3x(x - 2)$

c) f est **continue** et **strictement décroissante** sur $[0; 1]$

et on a $0 \in [f(1); f(0)]$

D'après le thm des valeurs intermédiaires, l'équation $f(x) = 0$ a donc une solution et une seule sur l'intervalle $[0; 1]$.

x	0	1
$3x$	0	+
$x - 2$		-
$f'(x)$	0	-
$f(x)$	1	$\searrow$ -1

2) a. La fonction f est continue et strictement croissante sur $[0; 3]$, avec $6 \in [f(0); f(3)]$. D'après le théorème des valeurs intermédiaires, l'équation $f(x) = 6$ admet une unique solution α sur $[0; 3]$.

b. On trouve $\alpha \simeq 2,17$

3) a) $f'(x) = 3x^2 + 12x + 9 = 0$

avec $\Delta = 36$ donc $x_1 = -1$ et $x_2 = -3$

On a $f(-1) = -1$ et $f(-3) = 3$

x	$-\infty$	-4	-3	-1	1	$+\infty$			
$f'(x)$	$+$	$ $	$+$	0	$-$	0	$+$	$ $	$+$
$h(x)$	$\nearrow$	-1	$\nearrow$	3	$\searrow$	-1	$\nearrow$	19	$\nearrow$

b) f est continue sur $\mathbb{R}$, elle est strictement croissante sur $[-1; 1]$

avec $10 \in [f(-1); f(1)]$, donc, d'après le théorème des valeurs intermédiaires, l'équation $f(x) = 10$

a une **unique solution** sur $[-1; 1]$

Par ailleurs, sur $[-4; -1]$, on a $f(x) \leq 3$ donc l'équation $f(x) = 0$ n'y a **aucune solution**.

c) Pour $m \in]3; 19]$ l'équation $f(x) = m$ a une **solution unique** sur $[-4; 1]$

Pour $m \in]-1; 3[$ l'équation a **trois solutions** sur $[-4; 1]$

Pour $m = -1$ ou pour $m = 3$, l'équation a **deux solutions** sur $[-4; 1]$

Et pour $m < -1$ ou $m > 19$, l'équation n'a **pas** de solutions

4) **ATTENTION** ! absolument pas besoin du TVI pour cet exercice ☺ il s'agit d'une équation qu'on sait parfaitement résoudre !!! Pour $x \neq 0$, on a $x + \frac{1}{x} = 3 \Leftrightarrow x^2 + 1 = 3x \Leftrightarrow x^2 - 3x + 1 = 0$ avec $\Delta = 5$ et donc deux solutions $x_1 = \frac{3+\sqrt{5}}{2} \simeq 2,6$ et $x_2 = \frac{3-\sqrt{5}}{2} \simeq 0,4$ et c'est fini...

Bon, comme vous avez dû foncer sur le TVI, je vous mets quand même la correction...

h est continue et dérivable sur $\mathbb{R}^*$ comme somme de fonctions continues et dérivables sur $\mathbb{R}^*$

$$h'(x) = 1 - \frac{1}{x^2} = \frac{x^2 - 1}{x^2} = \frac{(x+1)(x-1)}{x^2}$$

On a $h(-1) = -2$ et $h(1) = 2$

Sur $[\frac{1}{4}; 1]$ la fonction h est strictement décroissante et

on a $h(\frac{1}{4}) > 3 > h(1)$. D'après le théorème des **valeurs intermédiaires**, l'équation $h(x) = 3$ y admet une **unique solution** x_1

De même, sur l'intervalle $[1; 4]$, h est strictement croissante et $h(1) < 3 < h(4)$, donc l'équation $h(x) = 3$ y admet une **unique solution** x_2

À la calculatrice, on trouve $x_1 \simeq 0,4$ (car $h(0,38) > 3 > h(0,39)$) et $x_2 \simeq 2,6$ (car $h(2,61) < 3 < h(2,62)$)

x	$-\infty$	-1	0	1	$+\infty$		
$x^2 - 1$	+	0	-		-	0	+
x^2	+		+	0	+		+
$h'(x)$	+	0	-		-	0	+
$h(x)$	$\nearrow$	-2	$\searrow$		$\searrow$	2	$\nearrow$

Un peu plus long, non ?