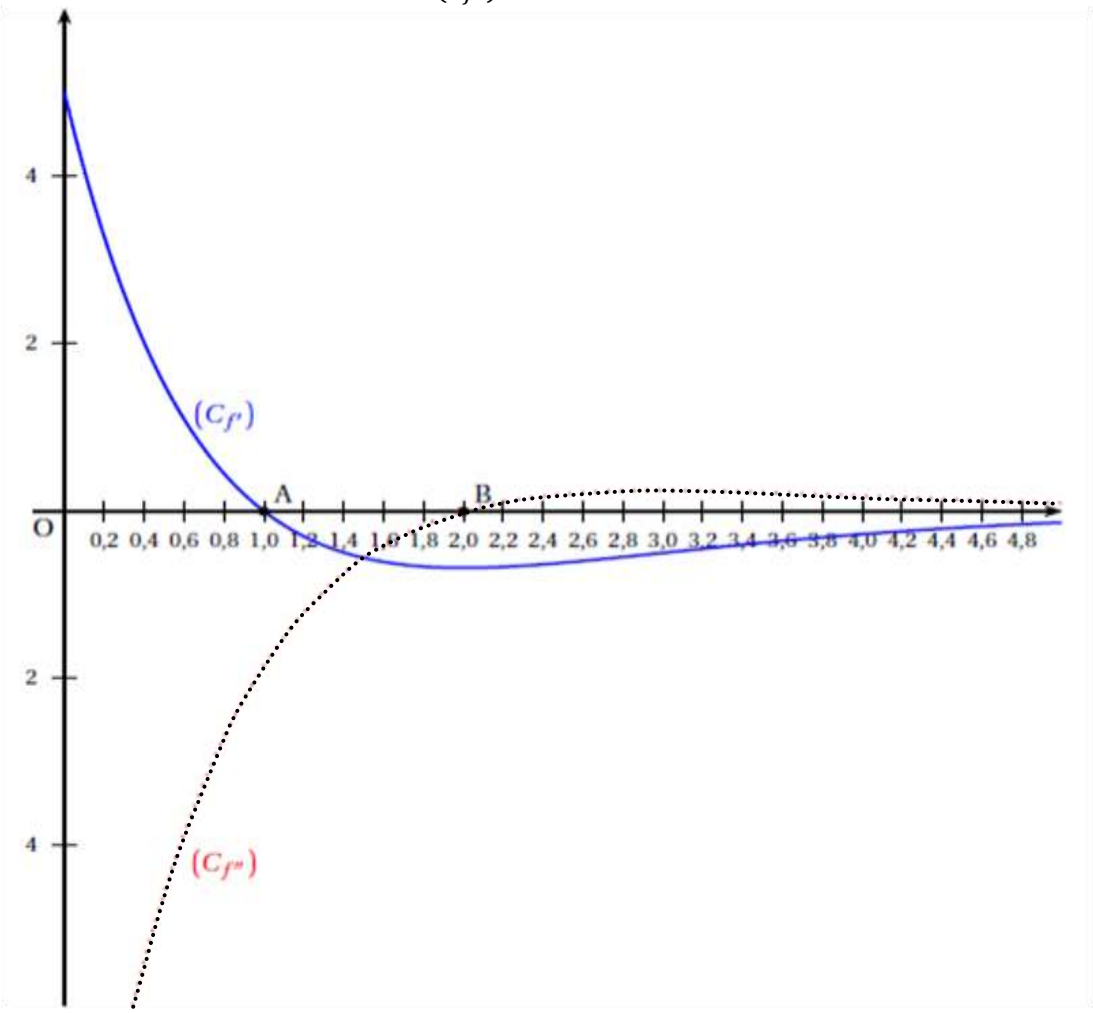
Sujet bac n°1 (Adapté ex Bac ES)

On considère une fonction f définie sur l'intervalle $[0\ ;\ +\infty[$.

Partie A - À l'aide d'un graphique

On a représenté ci-dessous la courbe $(C_{f'})$ de la fonction dérivée f' ainsi que la courbe $(C_{f''})$ de la fonction dérivée seconde f'' sur l'intervalle [0 ; 5].
Le point A de coordonnées (1 ; 0) appartient à $(C_{f'})$ et le point B de coordonnées (2 ; 0) appartient à la $(C_{f''})$



1. Déterminer le sens de variation de la fonction f . Justifier.

2. Déterminer sur quel(s) intervalle(s), la fonction f est convexe. Justifier.

3. La courbe de f admet-elle des points d'inflexion? Justifier. Si oui, préciser leur(s) abscisse(s).

Partie B - Étude de la fonction

La fonction f est définie sur [0 ; +∞[par $f(x) = 5xe^{-x}$.

1. Justifier que la fonction f est positive sur l'intervalle [0 ; +∞[.

2. a) Déterminer la limite de f en $+\infty$

b) Déterminer le tableau de variation complet de f sur [0 ; +∞[. Vous indiquerez les valeurs exactes.

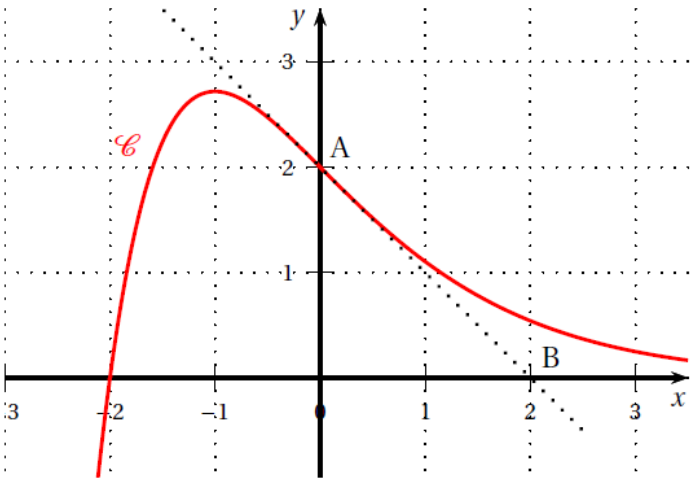
3. Montrer que l'équation $e^x = 5x$ n'admet qu'une unique solution α sur $[0;\ 1]$. En donner une valeur approchée à 10^{-2}

4. Montrer que la fonction F définie sur [0 ; +∞[par $F(x) = (-5x - 5)e^{-x}$ est une primitive de f sur [0 ; +∞[.

Sujet bac n°2 (Polynésie 21 adapté)

Cet exercice est composé de trois parties indépendantes.

On a représenté ci-contre, dans un repère orthonormé, une portion de la courbe représentative $\mathcal{C}$ d'une fonction f définie sur $\mathbb{R}$:



On considère les points $A(0;\ 2)$ et $B(2;\ 0)$.

Partie 1

Sachant que la courbe $\mathcal{C}$ passe par A et que la droite (AB) est la tangente à la courbe $\mathcal{C}$ au point A, donner par lecture graphique :

1. La valeur de $f(0)$ et celle de $f'(0)$.

2. Un intervalle sur lequel la fonction f semble convexe.

Partie 2

On note (E) l'équation différentielle : $y' = -y + e^{-x}$.

1. Vérifier que, pour tout réel k, la fonction $g_k(x) = (x-k)e^{-x}$ est une solution de l'équation (E)

2. Sachant que la fonction f est la solution particulière de (E) qui vérifie $f(0) = 2$, déterminer une expression de $f(x)$ en fonction de x.

Partie 3

On admet que pour tout nombre réel x, $f(x) = (x+2)e^{-x}$.

1. On rappelle que f' désigne la fonction dérivée de la fonction f.

a. Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f'(x) = (-x-1)e^{-x}$.

b. Étudier le signe de $f'(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$ et dresser le tableau des variations de f sur $\mathbb{R}$.
On ne précisera ni la limite de f en $-\infty$ ni la limite de f en $+\infty$.
On calculera la valeur exacte de l'extremum de f sur $\mathbb{R}$.

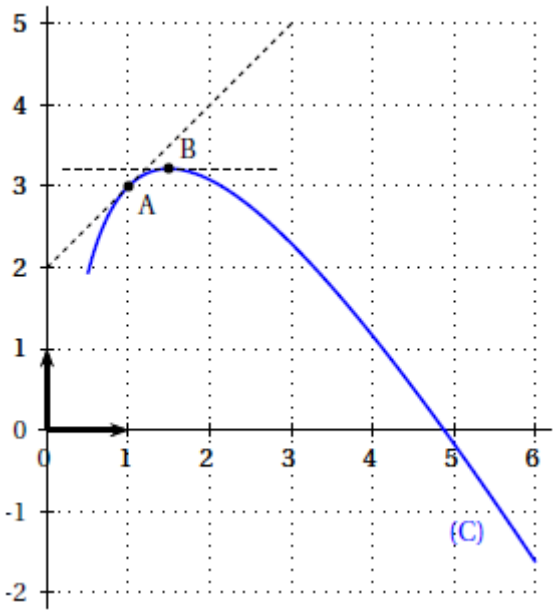
2. On rappelle que f'' désigne la fonction dérivée seconde de la fonction f.

a. Calculer pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f''(x)$.

b. Peut-on affirmer que f est convexe sur l'intervalle $[0\ ;\ +\infty[$?

Sujet bac n°3 (Adapté ex bac ES)

La courbe $(\mathcal{C})$ ci-dessous représente, dans un repère orthonormé, une fonction f définie et dérivable sur [0,5 ; 6]. Les points A (1; 3) et B d'abscisse 1,5 sont sur la courbe $(\mathcal{C})$



Les tangentes à la courbe $(\mathcal{C})$aux points A et B sont aussi représentées en pointillés sur ce graphique, la tangente au point B est horizontale.

On note f' la fonction dérivée de f .

Les parties A et B sont indépendantes.

PARTIE A : ÉTUDE GRAPHIQUE

1. Déterminer $f'(1{,}5)$.

2. La tangente à la courbe $(\mathcal{C})$passant par A passe par le point de coordonnées (0 ; 2). Déterminer une équation de cette tangente.

3. Déterminer la convexité de la fonction f sur [0,5 ; 6]. Argumenter la réponse.

PARTIE B :ÉTUDE ANALYTIQUE

On admet que la fonction f est définie sur [0,5;+∞[par $f(x) = -2x + 5 + 3\ln(x)$.

1. a. Montrer que ; pour tout $x \in [0{,}5;\ +\infty[$, on a :

$$f(x) = x\left(3\frac{\ln x}{x} - 2 + \frac{5}{x}\right)$$

b. Déterminer la limite de f quand x tend vers $+\infty$

2. Pour tout réel x de [0,5 ; +∞[, calculer $f'(x)$ et montrer que $f'(x) = \dfrac{-2x+3}{x}$

3. Étudier le signe de f' sur [0,5; +∞[puis dresser le tableau de variation de f sur [0,5; +∞[.

4. Montrer que l'équation $f(x) = 0$ admet exactement une solution α sur [0,5 ; +∞[.
Donner une valeur approchée de α à 10^{-2} près.

5. En déduire le tableau de signe de f sur [0,5; +∞[

6. On considère la fonction F définie sur [0,5; +∞[par $F(x) = -x^2 + 2x + 3x\ln(x)$.
Montrer que F est une primitive de f sur [0,5; +∞[

Sujet bac n°4 (Asie 21 - 2 adapté)

Dans cet exercice, on s'intéresse à la croissance du bambou Moso de taille maximale 20 mètres.
Le modèle de croissance de Ludwig von Bertalanffy suppose que la vitesse de croissance pour un tel bambou est proportionnelle à l'écart entre sa taille et la taille maximale.

Partie I : modèle discret

Dans cette partie, on observe un bambou de taille initiale 1mètre.
Pour tout entier naturel n, on note u_n la taille, en mètre, du bambou n jours après le début de l'observation.
On a ainsi $u_0 = 1$.
Le modèle de von Bertalanffy pour la croissance du bambou entre deux jours consécutifs se traduit par l'égalité :

$$u_{n+1} = u_n + 0{,}05(20 - u_n) \quad \text{pour tout entier naturel } n.$$

1. Vérifier que $u_1 = 1{,}95$.

2. a. Montrer que pour tout entier naturel n, $u_{n+1} = 0{,}95u_n + 1$.

b. On pose pour tout entier naturel n, $v_n = 20 - u_n$.
Démontrer que la suite (v_n) est une suite géométrique dont on précisera le terme initial v_0 et la raison.

c. En déduire que, pour tout entier naturel n, $u_n = 20 - 19 \times 0{,}95^n$.

3. Déterminer la limite de la suite (u_n).

Partie II : modèle continu

Dans cette partie, on souhaite modéliser la taille du même bambou Moso par une fonction donnant sa taille, en mètre, en fonction du temps t exprimé en jour.
D'après le modèle de von Bertalanffy, cette fonction est solution de l'équation différentielle

$$(E) \quad y' = 0{,}05(20 - y)$$

où y désigne une fonction de la variable t , définie et dérivable sur $[0\ ;\ +\infty[$ et y' désigne sa fonction dérivée.

Soit la fonction L définie sur l'intervalle $[0\ ;\ +\infty[$ par $L(t) = 20 - 19e^{-0{,}05t}$.

1. Vérifier que la fonction L est une solution de (E) et qu'on a également $L(0) = 1$.

2. On prend cette fonction L comme modèle et on admet que, si on note $L.$ sa fonction dérivée, $L'(t)$ représente la vitesse de croissance du bambou à l'instant t .

a. Comparer $L'(0)$ et $L'(5)$.

b. Calculer la limite de la fonction dérivée L' en $+\infty$.
Ce résultat est-il en cohérence avec la description du modèle de croissance exposé au début de l'exercice?