Corrections Savoir Vp.2

Corrigé Exercice 5

1) a) $\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} -2 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{AC} = \begin{pmatrix} -2 \\ -2 \\ -2 \end{pmatrix}$

$\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ne sont pas colinéaires, donc A, B et C n'étant pas alignés, ils **forment un plan $\mathcal{P}$.**

b) $\overrightarrow{AB}.\vec{u} = -2 - 6 + 8 = 0$ et $\overrightarrow{AC}.\vec{u} = -2 + 6 - 4 = 0$
$\vec{u}$ est orthogonal à deux vecteurs non colinéaires du plan $\mathcal{P}$: c'est donc un **vecteur normal au plan $\mathcal{P}$**

c) Tout vecteur **colinéaire à $\vec{u}$** est vecteur normal à $\mathcal{P}$, donc, selon votre choix : $\vec{v} = 2\vec{u} = (2; -6; 4)$ ou $\vec{w} = -\vec{u} = (-1; 3; -2)$ …

2) $\vec{u}.\vec{n} = -2 + 0 + 2 = \mathbf{0}$ et $\vec{v}.\vec{n} = 1 - 7 + 6 = \mathbf{0}$
Le vecteur n est orthogonal à deux vecteurs non colinéaires du plan $\mathcal{P}$: c'est donc un **vecteur normal à $\mathcal{P}$**

3) a) La face $BCGF$ est un carré, dons ses diagonales sont perpendiculaires, et on a $\overrightarrow{BG}.\overrightarrow{CF} = 0$ et, comme $\overrightarrow{CF} = \overrightarrow{DE}$, on a $\boldsymbol{\overrightarrow{BG}.\overrightarrow{DE} = 0}$
La droite (EF) est $BCGF$ sont orthogonales, donc (EF) est orthogonales à toute droite de (BCG), et, en particulier, $\boldsymbol{\overrightarrow{BG}.\overrightarrow{EF} = 0}$
Le vecteur $\overrightarrow{BG}$ est donc orthogonal à deux vecteurs non colinéaires de (DEF), c'est un **vecteur normal à (DEF).**

b) On a les coordonnées $G(1; 1; 0)$; $H(0; 1; 0)$ et $D(0; 1; 1)$
Par ailleurs $\overrightarrow{EI} = \frac{2}{3}\overrightarrow{EF}$ donc $I\left(\frac{2}{3}; 0; 0\right)$ et $\overrightarrow{EJ} = \frac{1}{3}\overrightarrow{EH}$ donc $J\left(0; \frac{1}{3}; 0\right)$
On a donc les vecteurs $\overrightarrow{HD} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$; $\overrightarrow{HI} = \begin{pmatrix} \frac{2}{3} \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{GJ} = \begin{pmatrix} -1 \\ -\frac{2}{3} \\ 0 \end{pmatrix}$
Donc $\boldsymbol{\overrightarrow{GJ}.\overrightarrow{HD}} = 0 + 0 + 0 = \mathbf{0}$ et $\boldsymbol{\overrightarrow{GJ}.\overrightarrow{HI}} = -\frac{2}{3} + \frac{2}{3} + 0 = \mathbf{0}$
Le vecteur $\overrightarrow{GJ}$ est orthogonal à deux vecteurs non colinéaires du plan (HDI), il est **donc normal au plan**

4) *Principe : si le point M appartient à $\mathcal{P}$ alors $\overrightarrow{AM}.\vec{n} = 0$… On calcule donc le produit scalaire : s'il est nul, le point appartient au plan, sinon il n'appartient pas…*

$\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} -3 \\ -3 \\ 0 \end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{AB}.\vec{n} = -3 + 3 + 0 = 0$ donc le point B appartient au plan $\mathcal{P}$

$\overrightarrow{AC} = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{AC}.\vec{n} = -2 - 1 + 6 = 3 \neq 0$ donc le point C n'appartient pas au plan $\mathcal{P}$

5) *Il faut montrer que $\overrightarrow{FK}$ est orthogonal à $\overrightarrow{AI}$ et $\overrightarrow{AJ}$ par exemple. Deux méthodes : en décomposant et en trouvent des produits scalaires nuls par considérations géométriques, ou en choisissant un bon repère, calcul de coordonnées puis de vecteurs…*
Méthode repère : Par ex $\left(D;\ \overrightarrow{DA}, \overrightarrow{DC}, \overrightarrow{DH}\right)$ on a $A(1; 0; 0)$; $F(1; 1; 1)$; $I\left(\frac{1}{2}; 1; 0\right)$; $J\left(\frac{1}{2}; 0; 1\right)$ et $K\left(0; \frac{1}{2}; \frac{1}{2}\right)$
Donc $\overrightarrow{FK} = \begin{pmatrix} -1 \\ -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$; $\overrightarrow{AI} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{AJ} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ On a $\overrightarrow{FK}.\overrightarrow{AI} = \frac{1}{2} - \frac{1}{2} + 0 = 0$ et $\overrightarrow{FK}.\overrightarrow{AJ} = \frac{1}{2} + 0 - \frac{1}{2} = 0$

Le vecteur $\overrightarrow{FK}$ est orthogonal à deux vecteur non colinéaires du plan (AIJ), il est donc **normal au plan**

6) Le plan $\mathcal{P}$ est dirigé par les vecteurs $\vec{u} = \begin{pmatrix} 4 \\ -5 \\ -3 \end{pmatrix}$ et $\vec{v} = \begin{pmatrix} -2 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix}$
on a $\vec{n}.\vec{u} = 4 + 5 - 9 = 0$ et $\vec{n}.\vec{v} = -2 + 2 + 0 = 0$
Donc le vecteur $\vec{n}$ orthogonal à deux vecteurs directeurs de $\mathcal{P}$ en est un vecteur normal.

Le plan $\mathcal{P}'$ est dirigé par les vecteurs $\overrightarrow{u'} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ -2 \end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{v'} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ on a $\vec{n}.\overrightarrow{u'} = 1 - 3 - 6 = -8 \neq 0$
Donc le vecteur $\vec{n}$ n'est pas orthogonal à un vecteur directeur de $\mathcal{P}$, ce n'est donc **pas un vecteur normal**.

7) Méthode : on cherche un vecteur $\vec{n} = (x; y; z)$ tel que $\boldsymbol{\vec{n}.\vec{u} = 0}$ et $\boldsymbol{\vec{n}.\vec{v} = 0}$
Donc tel que $\boldsymbol{-2x + 3y + 6z = 0 = x + 5z}$
On choisit une des coordonnées, puis on calcule les autres.
Par ex, pour $x = 5$, on calcule $5 + 5z = 0 \Leftrightarrow z = -1$ et $-10 + 3y - 6 = 0 \Leftrightarrow 3y = 16 \Leftrightarrow y = \frac{16}{3}$
Le vecteur $\boldsymbol{\vec{n}\left(5; \frac{16}{3}; -1\right)}$ est un vecteur normal au plan, ou donc aussi $\boldsymbol{\vec{n}'(15; 16; -3)}$…

Corrigé Exercice 6

1) a) $\vec{n}.\overrightarrow{n'} = 10 - 12 + 2 = 0$ les vecterus normaux des plans $\mathcal{P}$ et $\mathcal{P}'$ sont orthogonaux, donc **les plans sont eux-mêmes orthogonaux.**

b) $\frac{x_{\vec{n}}}{x_{\vec{v}}} = -\boldsymbol{\frac{2}{5}}$; $\frac{y_{\vec{n}}}{y_{\vec{v}}} = -\frac{3}{\frac{15}{2}} = -\frac{6}{15} = -\boldsymbol{\frac{2}{5}}$ et $\frac{z_{\vec{n}}}{z_{\vec{v}}} = \frac{1}{-\frac{5}{2}} = -\boldsymbol{\frac{2}{5}}$
Les coordonnées sont proportionnelles, donc les vecteurs sont **colinéaires**. Les plans $\mathcal{P}$ et Π ont leurs vecteurs normaux colinéaires, **ils sont donc parallèles** .

2) On a $\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} 6 \\ 0 \\ 9 \end{pmatrix} = 3\vec{n} \Rightarrow$ la droite (AB) a son vecteur directeur colinéaire au vecteur normal du plan $\mathcal{P}$:
elle est donc orthogonale au plan $\boldsymbol{\mathcal{P}}$

3) a) On a donc les vecteurs $\overrightarrow{RS} = \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{RT} = \begin{pmatrix} -1 \\ 4 \\ -4 \end{pmatrix}$
Donc $\boldsymbol{\vec{n}.\overrightarrow{RS}} = 12 + 10 - 22 = \boldsymbol{0}$ et $\boldsymbol{\vec{n}.\overrightarrow{RT}} = 4 + 40 - 44 = \boldsymbol{0}$
Le vecteur $\vec{n}$ est orthogonal à deux vecteurs non colinéaires du plan (RST), il est **donc normal au plan**

b) $\vec{n}.\vec{a} = -4 - 40 + 44 = 0$
Les plans $\mathcal{P}$ et (RST) ont leur vecteurs normaux orthogonaux, ils sont donc eux-mêmes perpendiculaires .

c) on a $4\vec{b} = \begin{pmatrix} 4 \\ -10 \\ -11 \end{pmatrix} = -\vec{n}$
Les vecteurs $\vec{b}$ et $\vec{n}$, vecteurs normaux des plans $\mathcal{P}'$ et (RST), sont colinéaires : **les plans sont donc parallèles**

4) La droite (MN) a pour vecteur directeur $\overrightarrow{MN} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 5 \end{pmatrix}$. On a $\frac{x_{\overrightarrow{MN}}}{x_{\vec{n}}} = \boldsymbol{1}$ et $\frac{z_{\overrightarrow{MN}}}{z_{\vec{n}}} = -5 \neq \frac{x_{\overrightarrow{MN}}}{x_{\vec{n}}}$
Le vecteur directeur de la droite (MN) n'est pas colinéaire au vecteur normal de Π : **la droite n'est donc pas orthogonale au plan**

Corrigé Exercice 7

1) a) $\mathcal{P}$ a une équation du type $-x-3y+2z+d=0$
Comme $A \in \mathcal{P}$, on a $-x_A-3y_A+2z_A+d=0 \Leftrightarrow -2+3+8+d=0 \Leftrightarrow d=-9$
Donc une équation cartésienne du plan $\mathcal{P}$ est : $\boldsymbol{-x-3y+2z-9=0}$

b) $-x_B-3y_B+2z_B-9=0+3+6-9=0$ donc le point $\boldsymbol{B}$ **appartient bien au plan** $\boldsymbol{\mathcal{P}}$
$-x_C-3y_C+2z_C-9=1-9-2-9=-19\neq 0$ donc le point $\boldsymbol{C}$ **n'appartient pas au plan** $\boldsymbol{\mathcal{P}}$

2) Le plan a pour vecteur normal le vecteur directeur de (DE), c'est-à-dire $\overrightarrow{DE}=\begin{pmatrix}6\\2\\-3\end{pmatrix}$
Donc son équation est du type : $6x+2y-3z+d=0$
Comme le plan passe par D, on a $6x_D+2y_D-3z_D+d=0 \Leftrightarrow -24-2-9+d=0 \Leftrightarrow d=35$
Donc une équation cartésienne du plan est : $\boldsymbol{6x+2y-3z+35=0}$

3) a) $\overrightarrow{RS}=\begin{pmatrix}1\\-2\\-4\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{RT}=\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}$ Les vecteurs ne sont pas colinéaires, les 3 points définissent bien un plan.

b) $\overrightarrow{RS}.\vec{n}=2-10+8=0$ et $\overrightarrow{RT}.\vec{n}=2+0-2=0$
Le vecteur $\vec{n}$ est orthogonal à deux vecteurs non colinéaires du plan, il est donc **normal au plan** $(\boldsymbol{RST})$

c) (RST) a une équation du type $2x+5y-2z+d=0$
Comme $S\in(RST)$, on a $2x_S+5y_S-2z_S+d=0 \Leftrightarrow 4-15+0+d=0 \Leftrightarrow d=11$
Donc une équation cartésienne du plan (RST) est : $\boldsymbol{2x+5y-2z+11=0}$

4) a) $\overrightarrow{DA}\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}$ est un vecteur normal au plan (ABE), donc l'équation est du type $x+d=0$
Comme $A\in(ABE)$ avec $A(1;0;0)$ on en déduit que $1+d=0 \Leftrightarrow d=-1$
Le plan (ABE) a pour équation : $\boldsymbol{x-1=0}$

b) $\overrightarrow{DC}\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}$ est un vecteur normal au plan (DHE), donc l'équation est du type $y+d=0$
Comme $D\in(DHE)$ avec $D(0;0;0)$ on en déduit que $d=0 \Rightarrow$ Le plan (DHE) a pour équation : $\boldsymbol{y=0}$

c) $\overrightarrow{DH}\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}$ est un vecteur normal au plan (HFG), donc l'équation est du type $z+d=0$
Comme $H\in(HFG)$ avec $H(0;0;1)$ on en déduit que $1+d=0 \Leftrightarrow d=-1$
Le plan (HFG) a pour équation : $\boldsymbol{z-1=0}$

5) a) On a $D(0;1;0); F(1;0;1); I\left(\frac{1}{2};0;0\right); J(0;\frac{1}{2};1)$ et $K(1;\frac{1}{2};0)$
$\overrightarrow{FD}=\begin{pmatrix}-1\\1\\-1\end{pmatrix}$; $\overrightarrow{IJ}=\begin{pmatrix}-\frac{1}{2}\\\frac{1}{2}\\1\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{IK}=\begin{pmatrix}\frac{1}{2}\\\frac{1}{2}\\0\end{pmatrix}$ donc $\boldsymbol{\overrightarrow{FD}.\overrightarrow{IJ}}=\frac{1}{2}+\frac{1}{2}-1=\boldsymbol{0}$ et $\boldsymbol{\overrightarrow{FD}.\overrightarrow{IK}}=-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}+0=\boldsymbol{0}$
$\overrightarrow{FD}$ est orthogonal à deux vecteurs non colinéaires du plan (IJK), il est donc orthogonal au plan : la droite (FD) de vecteur directeur $\overrightarrow{FD}$ **est bien orthogonale au plan (IJK)**

b) Le plan (IJK) a pour vecteur normal $\overrightarrow{FD}$ donc son équation cartésienne est du type $-x+y-z+d=0$
Comme $I\in(IJK)$ on a : $-x_I+y_I-z_I+d=0 \Leftrightarrow -\frac{1}{2}+d=0 \Leftrightarrow d=\frac{1}{2}$
Donc une équation cartésienne de (IJK) est : $\boldsymbol{-x+y-z+\frac{1}{2}=0}$

6) a) $A\in(ABC) \Leftrightarrow ax_A+by_A+cz_A+d=0 \Leftrightarrow \boldsymbol{a-b+c+d=0}$

b) De la même façon : $B \in (ABC) \Leftrightarrow \ ax_B + by_B + cz_B + d = 0 \ \Leftrightarrow \ -2a + b + 8c + d = 0$
Et $C \in (ABC) \Leftrightarrow \ ax_C + by_C + cz_C + d = 0 \ \Leftrightarrow \ 7a + 3b + 3c + d = 0$

Les nombres a, b, c et d sont donc bien solution du système $\begin{cases} \boldsymbol{a - b + c + d = 0} \\ \boldsymbol{-2a + b + 8c + d = 0} \\ \boldsymbol{7a + 3b + 3c + d = 0} \end{cases}$

c) $\boldsymbol{a = 1} \Rightarrow$le système devient $\begin{cases} 1 - b + c + d = 0 \\ -2 + b + 8c + d = 0 \\ 7 + 3b + 3c + d = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} d = b - c - 1 \\ -2 + b + 8c + b - c - 1 = 0 \\ 7 + 3b + 3c + b - c - 1 = 0 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} d = b - c - 1 \\ 2b + 7c - 3 = 0 \\ 4b + 2c + 6 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} d = b - c - 1 \\ 2b = -7c + 3 \\ 2(-7c + 3) + 2c + 6 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} d = b - c - 1 \\ 2b = -7c + 3 \\ -12c = -12 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} d = b - 2 \\ 2b = -4 \\ c = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} d = -4 \\ b = -2 \\ c = 1 \end{cases}$

Donc, une équation cartésienne du plan (ABC) est : $\boldsymbol{x - 2y + z - 4 = 0}$

Corrigé Exercice 8

1) a) Un vecteur normal à $\mathcal{P}'$ est $\boldsymbol{\vec{n}(2; -3; 0)}$

b) Pour $z = 0$ (pr exemple, on peut choisir n'importe quel nombre) et $x = 0$ on a $-3y - 1 = 0 \ \Leftrightarrow \ y = -\frac{1}{3}$
Donc le point $M\left(0; -\frac{1}{3}; 0\right)$ appartient au plan $\mathcal{P}'$ (évidemment, il en existe une infinité)

c) Le plan est parallèle à $\mathcal{P}'$, il a donc même vecteur normal, et une équation du type $2x - 3y + d = 0$
S'il passe par $M(2; 0; 0)$ alors : $2x_M - 3y_M + d = 0 \ \Leftrightarrow \ 4 + d = 0 \ \Leftrightarrow \ d = -4$
Ce plan a pour équation cartésienne $\boldsymbol{2x - 3y - 4 = 0}$

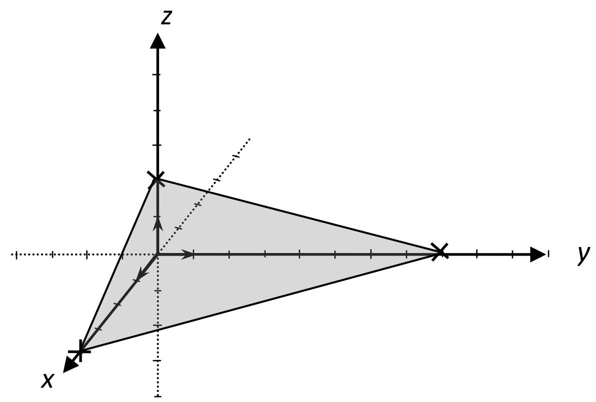
2) Le plan a une équation du type $x - 3y + 2z + d = 0$
Il passe par $A(3; 0; -1)$ donc $x_A - 3y_A + 2z_A + d = 0 \ \Leftrightarrow \ 3 - 2 + d = 0 \ \Leftrightarrow \ d = -1$
Ce plan a pour équation cartésienne $\boldsymbol{x - 3y + 2z - 1 = 0}$

3) a) Intersection avec (Ox),
c'est-à-dire l'ensemble des points de la forme $M(x; 0; 0)$
$\Rightarrow 2x - 8 = 0 \ \Leftrightarrow \ x = 4$
$\Rightarrow$ Il s'agit du point $\boldsymbol{M(4; 0; 0)}$

Intersection avec (Oy),
c'est-à-dire l'ensemble des points de la forme $N(0; y; 0)$
$\Rightarrow y - 8 = 0 \ \Leftrightarrow \ y = 8$
$\Rightarrow$ Il s'agit du point $\boldsymbol{N(0; 8; 0)}$

Intersection avec (Oz),
c'est-à-dire l'ensemble des points de la forme $P(0; 0; z)$
$\Rightarrow 4z - 8 = 0 \ \Leftrightarrow \ z = 2$
$\Rightarrow$ Il s'agit du point $\boldsymbol{P(0; 0; 2)}$

b)



4) Le plan $\mathcal{P}$ d'équation cartésienne : $\frac{x}{4} - \frac{y}{3} + z - 1 = 0$ a pour vecteur normal : $\vec{a}\left(\frac{1}{4}; -\frac{1}{3}; 1\right)$
Or, on remarque que $4\vec{a} = \left(1; -\frac{4}{3}; 4\right) = -\vec{n}$
Les deux vecteurs sont colinéaires, donc $\vec{n}$ est bien un vecteur normal de $\mathcal{P}$