Sujet d'entraînement n°3

Exercice 9

Soit la fonction f définie sur l'intervalle $]1\,;\,+\infty[$ par

$$f(x) = x - \ln(x-1)\,.$$

On considère la suite (u_n) de terme initial $u_0 = 10$ et telle que $u_{n+1} = f(u_n)$ pour tout entier naturel n.

Partie I :

La feuille de calcul ci-dessous a permis d'obtenir des valeurs approchées des premiers termes de la suite (u_n)

	A	B
1	n	u_n
2	0	10
3	1	7,802 775 42
4	2	5,885 444 74
5	3	4,299 184 42
6	4	3,105 509 13
7	5	2,360 951 82
8	6	2,052 767 5
9	7	2,001 345 09
10	8	2,000 000 9

1. Quelle formule a été saisie dans la cellule B3 pour permettre le calcul des valeurs approchées de (u_n) par recopie vers le bas ?

2. À l'aide de ces valeurs, conjecturer le sens de variation et la limite de la suite (u_n)

Partie II :

On rappelle que la fonction f est définie sur l'intervalle $]1\,;\,+\infty[$ par $f(x) = x - \ln(x-1)$.

1. Calculer $\lim\limits_{x \to 1} f(x)$.

On admettra que $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$.

2. a. Soit f' la fonction dérivée de f . Montrer que pour tout $x \in]1\,;\,+\infty[$, $f'(x) = \dfrac{x-2}{x-1}$

b. En déduire le tableau des variations de f sur l'intervalle $]1\,;\,+\infty[$, complété par les limites.

c. Justifier que pour tout $x \geq 2$, $f(x) \geq 2$.

Partie III :

1. En utilisant les résultats de la **partie II**, démontrer par récurrence que $u_n \geq 2$ pour tout entier naturel n.

2. Montrer que la suite (u_n) est décroissante.

3. En déduire que la suite (u_n) est convergente. On note ℓ sa limite.

4. On admet que ℓ vérifie $f(\ell) = \ell$. Donner la valeur de ℓ

Exercice 10

Partie 1

On désigne par h la fonction définie sur l'intervalle $]0\ ;\ +\infty[$ par :

$$h(x) = 1 + \frac{\ln(x)}{x^2}$$

On admet que la fonction h est dérivable sur $]0\ ;\ +\infty[$ et on note h' sa fonction dérivée.

1. Déterminez les limites de h en 0 et en $+\infty$.

2. Montrer que, pour tout nombre réel x de $]0\ ;\ +\infty[$:

$$h'(x) = \frac{1 - 2\ln(x)}{x^3}$$

3. En déduire les variations de la fonction h sur l'intervalle $]0\ ;\ +\infty[$.

4. Montrer que l'équation $h(x) = 0$ admet une solution unique α appartenant à $]0\ ;\ +\infty[$ et vérifier que :

$$\frac{1}{2} < \alpha < 1$$

5. Déterminer le signe de $h(x)$ pour x appartenant à $]0\ ;\ +\infty[$.

Partie 2

On désigne par f_1 et f_2 les fonctions définies sur $]0\ ;\ +\infty[$ par :

$$f_1(x) = x - 1 - \frac{\ln(x)}{x^2} \qquad \text{et} \qquad f_2(x) = x - 2 - \frac{2\ln(x)}{x^2}$$

On note $\mathcal{C}_1$ et $\mathcal{C}_2$ les représentations graphiques respectives de f_1 et f_2 dans un repère $(O; \vec{\imath}, \vec{\jmath})$.

1. Montrer que, pour tout nombre réel x appartenant à $]0\ ;\ +\infty[$, on a : $f_1(x) - f_2(x) = h(x)$.

2. Déduire des résultats de la **Partie 1** la position relative des courbes $\mathcal{C}_1$ et $\mathcal{C}_2$.
On justifiera que leur unique point d'intersection a pour coordonnées $(\alpha\ ;\ \alpha)$.
On rappelle que α est l'unique solution de l'équation $h(x) = 0$.

Exercice 11

Les parties A et B de cet exercice sont indépendantes.

Le virus de la grippe atteint chaque année, en période hivernale, une partie de la population d'une ville.
La vaccination contre la grippe est possible; elle doit être renouvelée chaque année.

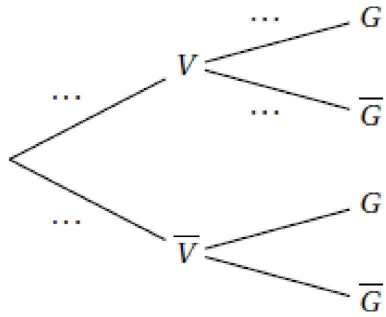
Partie A

L'efficacité du vaccin contre la grippe peut être diminuée en fonction des caractéristiques individuelles des personnes vaccinées, ou en raison du vaccin, qui n'est pas toujours totalement adapté aux souches du virus qui circulent. Il est donc possible de contracter la grippe tout en étant vacciné.

Une étude menée dans la population de la ville à l'issue de la période hivernale a permis de constater que :

- 40% de la population est vaccinée;
- 8 % des personnes vaccinées ont contracté la grippe;
- 20 % de la population a contracté la grippe.

On choisit une personne au hasard dans la population de la ville et on considère les évènements :
V : « la personne est vaccinée contre la grippe » ;
G : « la personne a contracté la grippe ».



1. a. Donner la probabilité de l'évènement G.

b. Reproduire l'arbre pondéré ci-contre et compléter les pointillés indiqués sur quatre de ses branches.

2. Déterminer la probabilité que la personne choisie ait contracté la grippe et soit vaccinée.

3. La personne choisie n'est pas vaccinée. Montrer que la probabilité qu'elle ait contracté la grippe est égale à 0,28.

Partie B

Dans cette partie, les probabilités demandées seront données à 10^{-3} *près.*

Un laboratoire pharmaceutique mène une étude sur la vaccination contre la grippe dans cette ville.
Après la période hivernale, on interroge au hasard n habitants de la ville, en admettant que ce choix se ramène à n tirages successifs indépendants et avec remise. On suppose que la probabilité qu'une personne choisie au hasard dans la ville soit vaccinée contre la grippe est égale à 0,4.
On note X la variable aléatoire égale au nombre de personnes vaccinées parmi les n interrogées.

1. Quelle est la loi de probabilité suivie par la variable aléatoire X ?

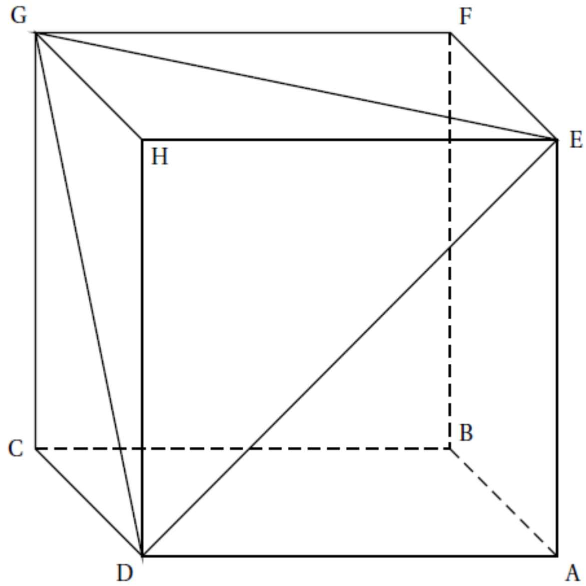
2. Dans cette question, on suppose que $n = 40$.

a. Déterminer la probabilité qu'exactement 15 des 40 personnes interrogées soient vaccinées.

b. Déterminer la probabilité qu'au moins la moitié des personnes interrogées soit vaccinée.

3. Quel est le nombre d'habitants de la ville qu'on doit interroger pour que la probabilité d'avoir au moins 20 personnes vaccinées soit au minimum de 75 % ?

Exercice 12



On considère un cube $ABCDEFGH$ de côté 1.

On se place dans le repère orthonormé $(B\ ;\ \overrightarrow{BA}\ ;\ \overrightarrow{BC}\ ;\ \overrightarrow{BF})$

1. Déterminer une représentation paramétrique de la droite (BH).

2. Démontrer que la droite (BH) est perpendiculaire au plan (DEG).

3. Déterminer une équation cartésienne du plan (DEG).

4. On note P le point d'intersection du plan (DEG) et de la droite (BH).
Déduire des questions précédentes les coordonnées du point P.

5. Que représente le point P pour le triangle DEG? Justifier la réponse.