

Corrigé 1.

1. Réponse : « a. sécantes non perpendiculaires. »

$$\overrightarrow{AB} \begin{pmatrix} 4 \\ 4 \\ -2 \end{pmatrix} \text{ et } (d) \text{ a pour vecteur directeur } \vec{u} \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ -5 \end{pmatrix}. \overrightarrow{AB} \cdot \vec{u} = 12 + 0 + 10 = 22$$

Les vecteurs directeurs ne sont ni colinéaires, ni orthogonaux, donc les droites ne sont ni parallèles, ni perpendiculaires

$$\text{Représentation paramétrique de } (AB): \begin{cases} x = -3 + 4t' \\ y = 1 + 4t' \\ z = 4 - 2t' \end{cases}, t' \in \mathbb{R}$$

$$\text{Intersection : } \begin{cases} -6 + 3t = -3 + 4t' \\ 1 = 1 + 4t' \\ 9 - 5t = 4 - 2t' \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -6 + 3t = -3 \\ t' = 0 \\ 9 - 5t = 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3t = 3 \\ t' = 0 \\ -5t = -5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t = 1 \\ t' = 0 \\ t = 1 \end{cases}$$

Le système a une solution, donc elles sont sécantes

2. Réponse : « d. orthogonale au plan $\mathcal{P}$. »

$$\text{Plan } \mathcal{P} \text{ de vecteur normal } \vec{n} \begin{pmatrix} 4 \\ 4 \\ -2 \end{pmatrix} = \overrightarrow{AB} \text{ donc } \overrightarrow{AB} \text{ est un vecteur normal du plan... donc orthogonal}$$

3. Réponse : « b. perpendiculaires. »

$$\text{Plan } \mathcal{P}' \text{ de vecteur normal } \vec{m} \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 6 \end{pmatrix} \quad \vec{m} \cdot \vec{n} = 8 + 4 - 12 = 0 \text{ les vecteurs normaux sont orthogonaux}$$

4. Réponse : « b. 51° »

$$\begin{aligned} \overrightarrow{AB} \begin{pmatrix} 4 \\ 4 \\ -2 \end{pmatrix} \text{ et } \overrightarrow{AC} \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ -5 \end{pmatrix} \text{ donc } \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} &= AB \times AC \times \cos \widehat{BAC} \\ \Leftrightarrow 12 + 0 + 10 &= \sqrt{4^2 + 4^2 + (-2)^2} \times \sqrt{3^2 + 0^2 + (-5)^2} \times \cos \widehat{BAC} \\ \Leftrightarrow 22 &= \sqrt{36} \times \sqrt{34} \times \cos \widehat{BAC} \Leftrightarrow \cos \widehat{BAC} = \frac{22}{6\sqrt{34}} \Leftrightarrow \widehat{BAC} = \cos^{-1} \left(\frac{22}{6\sqrt{34}} \right) \simeq 51^\circ \end{aligned}$$

Corrigé 2.

1. Réponse : « **c.** Les droites Δ_1 et Δ_2 sont sécantes. »

Vecteurs directeurs $\vec{u}_1 \begin{pmatrix} -3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ et $\vec{u}_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ pas colinéaires et $\vec{u}_1 \cdot \vec{u}_2 = -3 + 4 + 1 = 2$ pas orthogonaux

La seule réponse possible est donc sécantes

(Même s'il resterait à vérifier qu'il y a un point commun, donc une solution au système d'intersection, c'est un QCM... ça permet d'aller plus vite dans les réponses, puisqu'il n'y a pas la possibilité qu'elles soient non coplanaires)

2. Réponse : « **b.** La droite d est parallèle strictement au plan $\mathcal{P}$. »

d de vecteur directeur $\vec{u} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$ et $\mathcal{P}$ de vecteur normal $\vec{n} \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$ pas colinéaires

Mais $\vec{u} \cdot \vec{n} = 4 - 2 - 2 = 0$ donc vecteur normal est orthogonal à d donc $\mathcal{P}$ et d parallèles

Reste à tester s'il y a au moins un point commun, par ex $A(1; 3; 1)$ de d appartient-il à $\mathcal{P}$?

$4x + 2y - z + 3 = 4 \times 1 + 2 \times 3 - 1 + 3 = 12 \neq 0$ donc $A \notin \mathcal{P}$

3. Réponse : « **a.** Les points A, B, C et D ne sont pas coplanaires. »

$\overrightarrow{AB} \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$; $\overrightarrow{AC} \begin{pmatrix} -4 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix}$; et $\overrightarrow{CD} \begin{pmatrix} -2 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$ $\overrightarrow{AB}$ n'est colinéaire ni à $\overrightarrow{AC}$ ni à $\overrightarrow{CD}$

par élimination, c'est la dernière réponse sans avoir besoin de la vérifier

4. Réponse : « **c.** Les deux plans sont sécants »

Conseil : commencer par vérifier ce qui est facile et pas long (orthogonalité, appartenance)

Vecteurs normaux des plans $\vec{n} \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$ et $\vec{m} \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ et $\vec{n} \cdot \vec{m} = 12 - 2 - 1 = 9 \neq 0$ pas orthogonaux

On teste le point R : $3x - 2y + z + 1 = 3 - 2 - 2 + 1 = 0$ donc $R \in Q$

$4x + y - z + 3 = 4 + 1 + 2 + 3 = 10 \neq 0$ donc $R \notin Q'$

par élimination, c'est la dernière réponse sans avoir besoin de la vérifier

Corrigé 3.

Affirmation 1 : VRAIE $\overrightarrow{JH} = \overrightarrow{JF} + \overrightarrow{FE} + \overrightarrow{EH} = \overrightarrow{DM} + \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{DM} + 2\overrightarrow{BI} - \overrightarrow{CB}$ **CQFD**

Affirmation 2 : FAUX On a $\overrightarrow{AG} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BG} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AH} \Rightarrow$ Les points A, B, G et H sont coplanaires

Affirmation 3 : VRAIE $\overrightarrow{IB} \cdot \overrightarrow{LM} = \overrightarrow{IB} \cdot \overrightarrow{IK} = \overrightarrow{IB} \cdot \overrightarrow{IA}$ car A est le projeté orthogonal de K sur (IB)
 $= -IB^2 = -\left(\frac{1}{2}AB\right)^2 = -\frac{1}{4}$ car $AB = 1$

Affirmation 4 : FAUX

Le plan $\mathcal{P}$ a pour vecteur normal $\vec{n} \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix}$ et la droite (AB) a pour vecteur directeur $\overrightarrow{AB} \begin{pmatrix} 3 \\ -3 \\ 8 \end{pmatrix}$
 $\vec{n} \cdot \overrightarrow{AB} = 6 + 3 + 24 = 33 \neq 0$ Les vecteurs ne sont pas orthogonaux, donc la droite n'est pas // au plan

Affirmation 5 : VRAIE

Le plan $\mathcal{P}'$ parallèle à $\mathcal{P}$ une équation cartésienne du type $2x - y + 3z + k = 0$
 Comme $B \in \mathcal{P}'$, on doit avoir $2x_B - y_B + 3z_B + k = 0 \Leftrightarrow 10 + 3 + 21 + k = 0 \Leftrightarrow k = -34$
 Donc $2x - y + 3z - 34 = 0$ est une équation cartésienne de $\mathcal{P}'$
 Et en multipliant l'équation par -1 , on a bien $-2x + y - 3z + 34 = 0$

Affirmation 6 : VRAIE

La droite passant par $A(2; 0; -1)$ et orthogonale au plan $\mathcal{P}$, donc de vecteur directeur : $\vec{n}$ a pour

représentation paramétrique $\begin{cases} x = 2 + 2t \\ y = -t \\ z = -1 + 3t \end{cases}, t \in \mathbb{R}$

On cherche le point S , projeté orthogonal de A sur $\mathcal{P}$: c'est intersection de cette droite avec $\mathcal{P}$.

On résout : $\begin{cases} x = 2 + 2t \\ y = -t \\ z = -1 + 3t \\ 2x - y + 3z + 6 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2 + 2t \\ y = -t \\ z = -1 + 3t \\ 2(2 + 2t) - (-t) + 3(-1 + 3t) + 6 = 0 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} x = 2 + 2t \\ y = -t \\ z = -1 + 3t \\ 4 + 4t + t - 3 + 9t + 6 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2 + 2t \\ y = -t \\ z = -1 + 3t \\ 14t + 7 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2 + 2 \times \left(-\frac{1}{2}\right) \\ y = -\left(-\frac{1}{2}\right) \\ z = -1 + 3 \times \left(-\frac{1}{2}\right) \\ t = -\frac{7}{14} = -\frac{1}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ y = \frac{1}{2} \\ z = -\frac{5}{2} \\ t = -\frac{1}{2} \end{cases}$

On a donc $S\left(1; \frac{1}{2}; -\frac{5}{2}\right)$. On peut alors calculer la distance de A au plan $\mathcal{P}$:

$$AS = \sqrt{(1-2)^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^2 + \left(-\frac{5}{2} + 1\right)^2} = \sqrt{1 + \frac{1}{4} + \frac{9}{4}} = \sqrt{\frac{14}{4}} = \frac{\sqrt{14}}{2}$$

Affirmation 7 : VRAIE

(AB) a pour vecteur directeur $\overrightarrow{AB} \begin{pmatrix} 3 \\ -3 \\ 8 \end{pmatrix}$ et a pour représentation paramétrique : $\begin{cases} x = 2 + 3t \\ y = -3t \\ z = -1 + 8t \end{cases}, t \in \mathbb{R}$

On résout : $\begin{cases} -12 + 2k = 2 + 3t \\ 6 = -3t \\ 3 - 5k = -1 + 8t \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -12 + 2k = 2 - 6 \\ t = -2 \\ 3 - 5k = -1 - 16 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2k = 8 \\ t = -2 \\ -5k = -14 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} k = 4 \\ t = -2 \\ k = \frac{14}{5} \end{cases}$

Le système n'a pas de solution, les droites n'ont pas de point d'intersection.

d a pour vecteur directeur $\vec{u} \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -5 \end{pmatrix}$ alors on a $\frac{x_{\vec{u}}}{x_{\overrightarrow{AB}}} = \frac{3}{2} \neq \frac{y_{\vec{u}}}{y_{\overrightarrow{AB}}} = 0 \Rightarrow$ Les vecteurs $\vec{u}$ et $\overrightarrow{AB}$ ne sont pas colinéaires donc les droites ne sont pas parallèles. Elles sont donc bien non coplanaires.

Corrigé 4.

1. Affirmation : VRAIE

La droite D a pour vecteur directeur $\vec{u} \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}$ et la droite D' a pour vecteur directeur $\vec{v} \begin{pmatrix} 2 \\ -6 \\ -8 \end{pmatrix}$

On a $\vec{v} = -2\vec{u}$ les vecteurs directeurs sont colinéaires, donc les droites D et D' sont bien parallèles.

2. Affirmation : FAUSSE

Le plan (ABC) a pour vecteurs directeurs $\overrightarrow{AB} \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ -5 \end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{AC} \begin{pmatrix} 8 \\ 0 \\ 8 \end{pmatrix}$

On a $\vec{u} \cdot \overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ -5 \end{pmatrix} = -3 + 0 - 20 = -23 \neq 0$ donc le vecteur directeur de D n'est pas orthogonal à un des vecteurs directeurs du plan (ABC) : D n'est donc pas orthogonale au plan (ABC)

3. Affirmation : FAUSSE

Attention, rappelez-vous que prouver que les vecteurs directeurs ne sont pas colinéaires et donc que les droites ne sont pas parallèles ne suffit pas, car il y a encore la possibilité qu'elles soient non coplanaires, et donc non sécantes. Il faut donc résoudre le système d'intersection des 2 droites.

On cherche à résoudre $\begin{cases} 3 - t = -4 + 2t' \\ -2 + 3t = 1 - 3t' \\ 1 + 4t = 2 + t' \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3 - t = -4 + 2(4t - 1) \\ -2 + 3t = 1 - 3(4t - 1) \\ t' = 4t - 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -t = -7 + 8t - 2 \\ 3t = 3 - 12t + 3 \\ t' = 4t - 1 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} -9t = -9 \\ 15t = 6 \\ t' = 4t - 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t = 1 \\ t = \frac{6}{15} = \frac{2}{5} \\ t' = 4t - 1 \end{cases}$ Le système n'a pas de solution : les droites ne sont pas sécantes.

4. Affirmation : VRAIE

Il faut que la droite (FE) soit orthogonale au plan $\mathcal{P}$ ET que le point F appartienne au plan, il faut donc vérifier les 2.

On a $\overrightarrow{FE} \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix}$ et le plan $\mathcal{P}$ a pour vecteur normal $\vec{n} \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix}$. On a $\overrightarrow{FE} = -\vec{n}$ donc les vecteurs $\overrightarrow{FE}$ et $\vec{n}$ sont

colinéaires : la droite (FE) est orthogonale au plan $\mathcal{P}$

Par ailleurs, on a $2x_F - 3y_F + z_F - 6 = -6 + 9 + 3 - 6 = 12 - 12 = 0$ donc le point F appartient bien à $\mathcal{P}$

Le point F est bien le projeté orthogonal de E sur le plan $\mathcal{P}$.

5. Affirmation : FAUSSE

On a $\vec{v} \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \\ -a^2 \end{pmatrix}$ vecteur normal au plan $\mathcal{P}'$ et D a pour vecteur directeur $\vec{u} \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}$

Pour qu'une droite soit parallèle à un plan, il faut que son vecteur directeur soit orthogonal au vecteur normal du plan...

On doit donc avoir $\vec{v} \cdot \vec{u} = 0 \Leftrightarrow 3 + 3 - 4a^2 = 0 \Leftrightarrow a^2 = \frac{3}{2} \Leftrightarrow a = -\sqrt{\frac{3}{2}} \text{ ou } a = \sqrt{\frac{3}{2}}$

Il y a donc DEUX valeurs de a telles que la droites D soit parallèles au plan $\mathcal{P}'$, et non pas une.