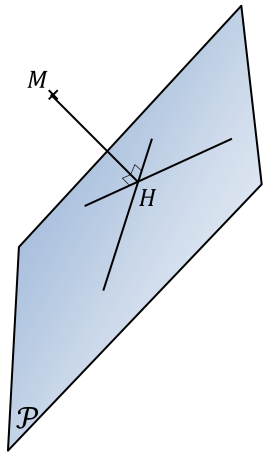
Savoir Vp.4 Projeté orthogonal d'un point sur un plan

Le projeté orthogonal H du point M sur le plan $\mathcal{P}$ est **l'intersection du plan $\boldsymbol{\mathcal{P}}$ avec la droite passant par $\boldsymbol{M}$ et perpendiculaire à $\boldsymbol{\mathcal{P}}$**.

$\Leftrightarrow$ H est le point de $\mathcal{P}$ tel que : $(\boldsymbol{HM}) \perp \boldsymbol{\mathcal{P}}$



Méthode : trouver les coordonnées de $\boldsymbol{H}$

On a : $\mathcal{P} : ax + by + cz + d = 0 \;\; et \; M(x_M ; y_M ; z_M)$ et on appelle H le projeté orthogonal de M sur $\mathcal{P}$

Un vecteur normal de $\mathcal{P}$ est $\vec{n}\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$

La droite Δ, passant par M et perpendiculaire à $\mathcal{P}$ est donc de vecteur directeur $\vec{n}\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$ donc sa représentation paramétrique est : $\Delta : \begin{cases} x = x_M + at \\ y = y_M + bt \\ z = z_M + ct \end{cases} \quad t \in \mathbb{R}$

H est l'intersection de $\mathcal{P}$ et de Δ donc on résout : $\begin{cases} x = x_M + at \\ y = y_M + bt \\ z = z_M + ct \\ ax + by + cz + d = 0 \end{cases}$

$\Rightarrow \; a(x_M + at) + b(y_M + bt) + c(z_M + ct) + d = 0$ (inconnue t)

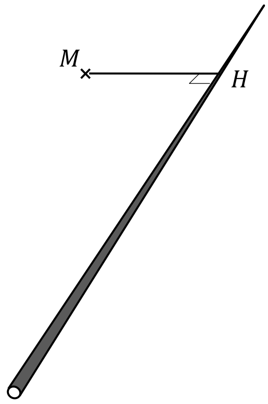
Une fois que t est trouvé, on calcule les coordonnées de H en remplaçant t dans Δ : $\begin{cases} x_H = x_M + at \\ y_H = y_M + bt \\ z_H = z_M + ct \end{cases}$

Exemple :

Soit $\mathcal{P}$ un plan d'équation cartésienne : $x - 2y + 3z - 4 = 0$ et un point $A(4;\ -1;\ -2)$

Soit H le projeté orthogonal de A sur $\mathcal{P}$. Quelles sont les coordonnées de H ?

Projeté orthogonal d'un point sur une droite



- **Le projeté orthogonal H du point M sur la droite Δ est l'intersection de Δ avec le plan $\mathcal{P}$ passant par M et perpendiculaire à Δ.**

Méthode : trouver les coordonnées de H

On a $\Delta : \begin{cases} x = x_A + at \\ y = y_A + bt \\ z = z_A + ct \end{cases} \quad t \in \mathbb{R}$ donc de vecteur directeur $\vec{u}\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$

Soit $\mathcal{P}$ le plan passant par M et perpendiculaire à Δ

$\vec{\mathrm{u}}$ aussi vecteur normal de $\mathcal{P}$ donc équation cartésienne du type $\mathcal{P} : ax + by + cz + d = 0$
Comme $\mathcal{P}$ passe par $M(x_M; y_M; z_M)$ on trouve $d = -ax_M - by_M - cz_M$

H est l'intersection de $\mathcal{P}$ et de Δ donc on résout : $\begin{cases} x = x_A + at \\ y = y_A + bt \\ z = z_A + ct \\ ax + by + cz + d = 0 \end{cases}$

On résout alors : $a(x_A + at) + b(y_A + bt) + c(z_A + ct) + d = 0$ (inconnue t)

Une fois que t est trouvé, on calcule les coordonnées de H en remplaçant t dans Δ : $\begin{cases} x_H = x_A + at \\ y_H = y_A + bt \\ z_H = z_A + ct \end{cases}$

Exemple :

On donne $A(1; -2; 1)$ $B(-1; 0; 4)$ et $C(0; 0; -1)$. Déterminer le projeté orthogonal de C sur (AB).