

Sujet n°3 : Vrai-faux Corrections

Corrigé sujet 3 - Exercice 1

Affirmation 1 : L'axe des ordonnées (Oy) passe par O et est dirigé par le vecteur $\vec{j} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$.

Sa représentation paramétrique est : $(Oy) : \begin{cases} x = 0 \\ y = \theta \\ z = 0 \end{cases} \quad \theta \in \mathbb{R}$

Pour vérifier que (d) et (Oy) ne sont pas sécantes, on résout : $\begin{cases} 0 = 3 - 2t \\ \theta = -1 \\ 0 = 2 - 6t \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t = \frac{3}{2} \\ \theta = -1 \\ t = \frac{1}{3} \end{cases}$

Le système n'est pas compatible donc en effet, elles ne sont pas sécantes : elles peuvent être parallèles ou non coplanaires.

La droite (d) a pour vecteur directeur $\vec{u} \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ -6 \end{pmatrix}$. $\vec{u}$ et $\vec{j}$ ne sont pas colinéaires donc (Oy) et (d) ne sont pas parallèles. Elles sont donc non coplanaires.

L'affirmation 1 est VRAIE

Affirmation 2

Le plan $\mathcal{P}'$ passant par A et orthogonal à (d) a pour vecteur normal le vecteur directeur de (d) que l'on a nommé $\vec{u}$.

Son équation est donc de la forme : $-2x - 6z + d = 0$.

$$A \in \mathcal{P}' \Rightarrow -2 \times 3 - 6 \times (-2) + d = 0 \Leftrightarrow d = -6$$

Ainsi $\mathcal{P}' : -2x - 6z - 6 = 0 \Leftrightarrow x + 3z + 3 = 0$

L'affirmation 2 est VRAIE

Affirmation 3 : On a $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = AB \times AC \times \cos \widehat{BAC}$.

$$\text{On a : } \overrightarrow{AB} \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} \quad \text{On a : } x_C = 2 \text{ et } C \in (d) \Rightarrow \begin{cases} x_C = 3 - 2t \\ y_C = -1 \\ z_C = 2 - 6t \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2 = 3 - 2t \\ y_C = -1 \\ z_C = 2 - 6t \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t = \frac{1}{2} \\ y_C = -1 \\ z_C = 2 - 3 = -1 \end{cases}$$

On a donc $C \left(\frac{1}{2}; -1; -1 \right)$ et $\overrightarrow{AC} \left(-\frac{5}{2}; 2; 1 \right)$.

On trouve donc $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = -5 - 2 - 2 = -9$; $AB = \sqrt{4 + 1 + 4} = 3$ et $AC = \sqrt{\frac{25}{4} + 4 + 1} = \sqrt{\frac{45}{4}} = \frac{3\sqrt{5}}{2}$.

Ainsi $\cos \widehat{BAC} = \frac{\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}}{AB \times AC} = \frac{-9}{\frac{9\sqrt{5}}{2}} = -\frac{2}{\sqrt{5}}$ et $\cos \frac{\pi}{6} = \frac{\sqrt{3}}{2}$ donc $\frac{\pi}{6}$ ne peut pas être une mesure de $\widehat{BAC}$.

L'affirmation 3 est FAUSSE

Affirmation 4

(BH) passe par B et est orthogonale à $\mathcal{P}$, elle a donc son vecteur normal $\vec{n} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}$ pour vecteur directeur.

Donc : $(BH) : \begin{cases} x = 5 + t' \\ y = -4 \\ z = -1 + 3t' \end{cases} \quad t' \in \mathbb{R} \quad \text{et } H \text{ est l'intersection de } (BH) \text{ et de } \mathcal{P}, \text{ donc on résout :}$

$$5 + t' + 3(-1 + 3t') - 7 = 0 \Leftrightarrow 10t' - 5 = 0 \Leftrightarrow t' = \frac{1}{2}$$

On obtient donc $H \left(\frac{11}{2}; -4; \frac{1}{2} \right)$ et $\overrightarrow{BH} \left(\frac{1}{2}; 0; \frac{3}{2} \right)$ d'où $BH = \sqrt{\frac{1}{4} + \frac{9}{4}} = \frac{\sqrt{10}}{2}$

L'affirmation 4 est VRAIE

Corrigé sujet 3 - Exercice 2

Affirmation 1

On a :

$$-1 \leq \cos(n) \leq 1 \Leftrightarrow 1 \leq 2 + \cos(n) \leq 3 \Leftrightarrow 1 \geq \frac{1}{2 + \cos(n)} \geq \frac{1}{3} \Leftrightarrow n \geq \frac{n}{2 + \cos(n)} \geq \frac{n}{3}$$

Puisque $\frac{n}{3} \rightarrow +\infty$, et que $v_n \geq \frac{n}{3}$, alors par comparaison, $v_n \rightarrow +\infty$.

L'affirmation 1 est VRAIE

Affirmation 2

On a $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = AB \times AC \times \cos \widehat{BAC}$.

$$\text{On a : } \overrightarrow{AB} \begin{pmatrix} 4 \\ -2 \\ 6 \end{pmatrix} \text{ et } \overrightarrow{AC} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \Rightarrow AB = \sqrt{16 + 4 + 36} = 2\sqrt{14} \text{ et } AC = \sqrt{2}.$$

On trouve par ailleurs $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = 4 + 6 = 10$.

$$\text{Ainsi } \cos \widehat{BAC} = \frac{\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}}{AB \times AC} = \frac{10}{4\sqrt{7}} = \frac{5}{2\sqrt{7}} \text{ et } \cos 30^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2} \text{ donc } 30^\circ \text{ ne peut pas \^etre une mesure de } \widehat{BAC}.$$

L'affirmation 2 est FAUSSE

Affirmation 3

$$h''(x) = x \ln x - 3x = x(\ln x - 3)$$

$$\text{Or } \ln x - 3 \geq 0 \Leftrightarrow \ln x \geq 3 \Leftrightarrow x \geq e^3$$

Ainsi, sur $[e^3; +\infty[$, x est positif et $\ln x - 3$ aussi, donc h'' est positive et h est convexe.

L'affirmation 3 est VRAIE

Corrigé sujet 3 - Exercice 3

Affirmation 1

$$u_n = \frac{1 + 5^n}{2 + 3^n} = \frac{5^n}{3^n} \times \frac{\frac{1}{5^n} + 1}{\frac{2}{3^n} + 1} = \left(\frac{5}{3}\right)^n \times \frac{\frac{1}{5^n} + 1}{\frac{2}{3^n} + 1}$$

Etant donné que 5, 3 et $\frac{5}{3}$ sont supérieurs à 1, on a $5^n \rightarrow +\infty$, $3^n \rightarrow +\infty$, $\left(\frac{5}{3}\right)^n \rightarrow +\infty$ et $\frac{\frac{1}{5^n} + 1}{\frac{2}{3^n} + 1} \rightarrow \frac{0+1}{0+1} = 1$.

Donc $u_n \rightarrow +\infty$

L'affirmation 1 est FAUSSE

Affirmation 2

Par une vérification sur la calculatrice, on conjecture que cela semble vrai.

Montrons donc par récurrence que $w_n \geq n$.

Init : Pour $n = 0$, on a $w_n = w_0 = 0$ et $n = 0$ donc $w_n \geq n$ au rang 0.

Hérédité : Si $w_n \geq n$ au rang p , alors $w_p \geq p$,

Alors pour $n = p + 1$, on a $w_n = w_{p+1} = 3w_p - 2p + 3$ et $n = p + 1$

$$\text{On a donc : } w_p \geq p \Rightarrow 3w_p \geq 3p \Rightarrow 3w_p - 2p + 3 \geq p + 3 \geq p + 1 \Rightarrow w_{p+1} \geq p + 1$$

Ainsi on a $w_n \geq n$ au rang $p + 1$.

Conclusion : Pour tout n , on a $w_n \geq n$.

L'affirmation 2 est VRAIE

Affirmation 3

La courbe n'est pas au-dessus de sa tangente en A , donc elle n'est pas convexe partout.

L'affirmation 3 est FAUSSE

Affirmation 4

1^{re} méthode : Soit $f(x) = \ln(x) - x + 1$, on a $f'(x) = \frac{1}{x} - 1 = \frac{1-x}{x}$.

x	0	1	$+\infty$	
$1-x$	+	0	-	
x	0	+	+	
$f'(x)$		+	0	-
$f(x)$		↗	0	↘

Donc 0 est un maximum pour la fonction f , ainsi $f(x) \leq 0$.

2^e méthode : $f''(x) = -\frac{1}{x^2} < 0$ donc f est concave et sa courbe est en-dessous de ses tangentes, en particulier de sa tangente en $x = 1$ dont l'équation est $y = f'(1)(x - 1) + f(1) \Leftrightarrow y = 0$.
Donc $f(x) \leq 0$.

L'affirmation 4 est VRAIE

Corrigé sujet 3 - Exercice 4

Affirmation 1

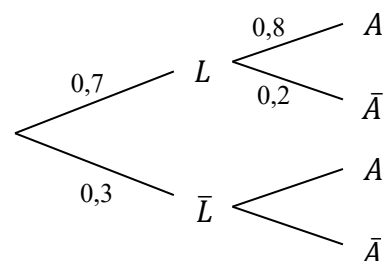
Soit A : « la personne choisit l'audioguide » et L : « la personne a acheté son billet en ligne »

On nous donne : $p_L(A) = 0,8$, $p(L) = 0,7$ et $p(\bar{A}) = 0,32$

On cherche $p_{\bar{L}}(\bar{A}) = \frac{p(\bar{L} \cap \bar{A})}{p(\bar{L})}$.

On a $p(A \cap L) = 0,7 \times 0,8 = 0,56$. On obtient donc :

	A	$\bar{A}$	Total
L	0,56	0,14	0,7
$\bar{L}$	0,12	0,18	0,3
Total	0,68	0,32	1



On a donc $p_{\bar{L}}(\bar{A}) = \frac{p(\bar{L} \cap \bar{A})}{p(\bar{L})} = \frac{0,18}{0,3} = \frac{18}{30} < \frac{20}{30} = \frac{2}{3}$

L'affirmation 1 est FAUSSE

Affirmation 2

Soit X la variable aléatoire donnant le nombre de visiteurs optant pour l'audioguide.

X suit une loi binomiale de paramètres $n = 12$ et $p = p(A) = 0,68$.

On donc $p(X = 6) = \binom{12}{6} 0,68^6 \times 0,32^6 = 924 \times (0,68 \times 0,32)^6 = 924 \times 0,2176^6$

L'affirmation 2 est VRAIE

Affirmation 3

$E(X) = 0,1 \times 50 + 0,6 \times 80 + 0,3 \times 100 = 83$

L'affirmation 3 est FAUSSE