Entraînement bac 2

Exercice n°1 - Probabilités (Métropole mars 21 - 1)

Dans une école de statistique, après étude des dossiers des candidats, le recrutement se fait de deux façons :

- 10% des candidats sont sélectionnés sur dossier. Ces candidats doivent ensuite passer un oral à l'issue duquel 60% d'entre eux sont finalement admis à l'école.
- Les candidats n'ayant pas été sélectionnés sur dossier passent une épreuve écrite à l'issue de laquelle 20% d'entre eux sont admis à l'école.

Partie 1

On choisit au hasard un candidat à ce concours de recrutement. On notera :

- D l'évènement « le candidat a été sélectionné sur dossier » ;
- A l'évènement « le candidat a été admis à l'école » ;
- $\overline{D}$ et $\bar{A}$ les évènements contraires des évènements D et A respectivement.

1. Traduire la situation par un arbre pondéré.

2. Calculer la probabilité que le candidat soit sélectionné sur dossier et admis à l'école.

3. Montrer que la probabilité de l'évènement A est égale à 0,24.

4. On choisit au hasard un candidat admis à l'école. Quelle est la probabilité que son dossier n'ait pas été sélectionné?

Partie 2

1. On admet que la probabilité pour un candidat d'être admis à l'école est égale à 0,24.
On considère un échantillon de sept candidats choisis au hasard, en assimilant ce choix à un tirage au sort avec remise. On désigne par X la variable aléatoire dénombrant les candidats admis à l'école parmi les sept tirés au sort.

a. On admet que la variable aléatoire X suit une loi binomiale. Quels sont les paramètres de cette loi ?

b. Calculer la probabilité qu'un seul des sept candidats tirés au sort soit admis à l'école. On donnera une réponse arrondie au centième.

c. Calculer la probabilité qu'au moins deux des sept candidats tirés au sort soient admis à cette école. On donnera une réponse arrondie au centième.

2. Un lycée présente n candidats au recrutement dans cette école, où n est un entier naturel non nul.
On admet que la probabilité pour un candidat quelconque du lycée d'être admis à l'école est égale à 0,24 et que les résultats des candidats sont indépendants les uns des autres.

a. Donner l'expression, en fonction de n, de la probabilité qu'aucun candidat issu de ce lycée ne soit admis à l'école.

b. À partir de quelle valeur de l'entier n la probabilité qu'au moins un élève de ce lycée soit admis à l'école est-elle supérieure ou égale à 0,99?

Exercice n°2 - Probabilités & Suites (Ancien bac)

On étudie un modèle de propagation d'un virus dans une population, semaine après semaine. Chaque individu de la population peut être, à l'exclusion de toute autre possibilité :

- soit susceptible d'être atteint par le virus, on dira qu'il est « de type S » ;
- soit malade (atteint par le virus) ;
- soit immunisé (ne peut plus être atteint par le virus).

Un individu est immunisé lorsqu'il a été vacciné, ou lorsqu'il a guéri après avoir été atteint par le virus.
Pour tout entier naturel n, le modèle de propagation du virus est défini par les règles suivantes :

- Parmi les individus de type S en semaine n, on observe qu'en semaine $n+1$: 85 % restent de type S, 5 % deviennent malades et 10 % deviennent immunisés ;
- Parmi les individus malades en semaine n, on observe qu'en semaine $n+1$: 65 % restent malades, et 35 % sont guéris et deviennent immunisés.
- Tout individu immunisé en semaine n reste immunisé en semaine $n+1$.

On choisit au hasard un individu dans la population.
On considère les événements suivants :

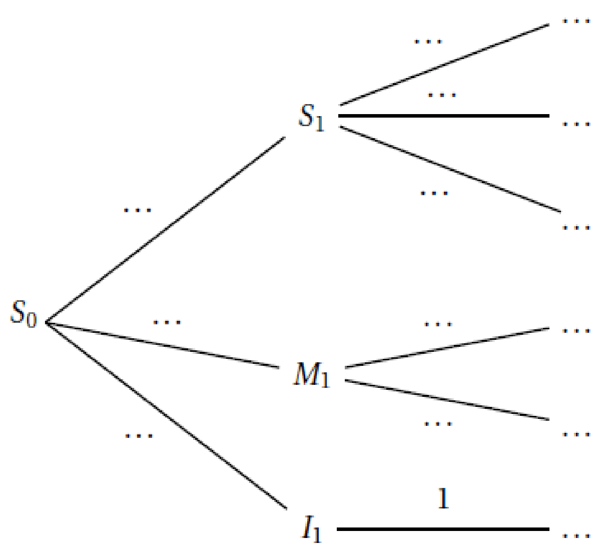
S_n : « l'individu est de type S en semaine n » ;
M_n : « l'individu est malade en semaine n » ;
I_n : « l'individu est immunisé en semaine n ».

En semaine 0, tous les individus sont considérés « de type S », on a donc les probabilités suivantes :
$P(S_0) = 1$; $P(M_0) = 0$ et $P(I_0) = 0$.

Partie A

On étudie l'évolution de l'épidémie au cours des semaines 1 et 2.

1. Reproduire sur la copie et compléter l'arbre de probabilités donné ci-contre :



2. Montrer que $P(I_2) = 0{,}2025$.

3. Sachant qu'un individu est immunisé en semaine 2, quelle est la probabilité, arrondie au millième, qu'il ait été malade en semaine 1 ?

Partie B

On étudie à long terme l'évolution de la maladie.
Pour tout entier naturel n, on : $u_n = P(S_n)$, $v_n = P(M_n)$ et $w_n = P(I_n)$ les probabilités respectives des événements S_n, M_n et I_n.

1. Justifier que, pour tout entier naturel *n*, on a : $u_n + v_n + w_n = 1$.

On admet que la suite (v_n) est définie par $v_{n+1} = 0{,}65v_n + 0{,}05u_n$.

2. À l'aide d'un tableur, on a calculé les premiers termes des suites (u_n), (v_n) et (w_n).

Pour répondre aux questions a. et b. suivantes, on utilisera la feuille de calcul reproduite ci-contre.

	A	B	C	D
1	n	u_n	v_n	w_n
2	0	1	0	0
3	1	0,8500	0,0500	0,1000
4	2	0,7225	0,0750	0,2025
5	3	0,6141	0,0849	0,3010
6	4	0,5220	0,0859	0,3921
7	5	0,4437	0,0819	0,4744
8	6	0,3771	0,0754	0,5474
...	...	...	...	
20	18	0,0536	0,0133	0,9330
21	19	0,0456	0,0113	0,9431
22	20	0,0388	0,0096	0,9516

a. Quelle formule, saisie dans la cellule C3, permet par recopie vers le bas, de calculer les termes de la suite (v_n) ?

b. On admet que les termes de (v_n) augmentent, puis diminuent à partir d'une certain rang N, appelé le « pic épidémique » : c'est l'indice de la semaine pendant laquelle la probabilité d'être malade pour un individu choisi au hasard est la plus grande. Déterminer la valeur du pic épidémique prévue par ce modèle.

3. a. Justifier que, pour tout entier naturel n, on a : $u_{n+1} = 0{,}85u_n$.
En déduire l'expression de u_n en fonction de n.

b. Montrer, à l'aide d'un raisonnement par récurrence, que pour tout entier naturel n,

$$v_n = \frac{1}{4}(0{,}85^n - 0{,}65^n)$$

4. Calculer les limites de chacune des suites (u_n), (v_n) et (w_n).
Que peut-on en déduire quant à l'évolution de l'épidémie prévue à long terme par ce modèle ?

Exercice n°3 - Probabilités (Métropole juin 21 - 2)

Cet exercice est un questionnaire à choix multiples. Pour chacune des questions suivantes, une seule des quatre réponses proposées est exacte.
Une réponse exacte rapporte un point. Une réponse fausse, une réponse multiple ou l'absence de réponse à une question ne rapporte ni n'enlève de point.
Pour répondre, indiquer sur la copie le numéro de la question et la lettre de la réponse choisie.
Aucune justification n'est demandée.

PARTIE I

Dans un centre de traitement du courrier, une machine est équipée d'un lecteur optique automatique de reconnaissance de l'adresse postale. Ce système de lecture permet de reconnaître convenablement 97% des adresses ; le reste du courrier, que l'on qualifiera d'illisible pour la machine, est orienté vers un employé du centre chargé de lire les adresses.
Cette machine vient d'effectuer la lecture de neuf adresses. On note X la variable aléatoire qui donne le nombre d'adresses illisibles parmi ces neuf adresses.
On admet que X suit la loi binomiale de paramètres $n = 9$ et $p = 0,03$.

1. La probabilité qu'aucune des neuf adresses soit illisible est égale, au centième près, à :

a. 0 **b.** 1 **c.** $0,24$ **d.** $0,76$

2. La probabilité qu'exactement deux des neuf adresses soient illisibles pour la machine est :

a. $\binom{9}{2} \times 0,97^2 \times 0,03^7$ **b.** $\binom{7}{2} \times 0,97^2 \times 0,03^7$ **c.** $\binom{9}{2} \times 0,97^7 \times 0,03^2$ **d.** $\binom{7}{2} \times 0,97^7 \times 0,03^2$

3. La probabilité qu'au moins une des neuf adresses soit illisible pour la machine est :

a. $P(X < 1)$ **b.** $P(X \leq 1)$ **c.** $P(X > 2)$ **d.** $1 - P(X = 0)$

PARTIE II

Une urne contient 5 boules vertes et 3 boules blanches, indiscernables au toucher.
On tire au hasard successivement et sans remise deux boules de l'urne.
On considère les évènements suivants :

- V_1 : « la première boule tirée est verte » ;
- B_1 : « la première boule tirée est blanche » ;
- V_2 : « la seconde boule tirée est verte » ;
- B_2 : « la seconde boule tirée est blanche ».

4. La probabilité de V_2 sachant que V_1 est réalisé, notée $P_{V_1}(V_2)$, est égale à :

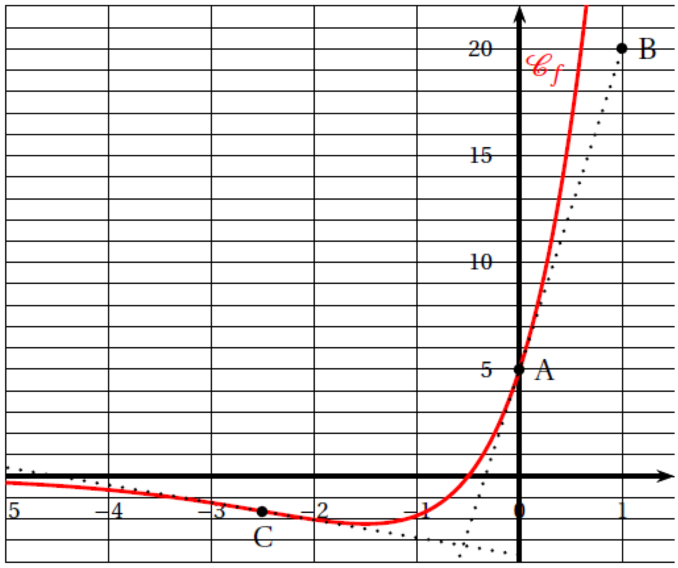
a. $\frac{5}{8}$ **b.** $\frac{4}{7}$ **c.** $\frac{5}{14}$ **d.** $\frac{20}{56}$

5. La probabilité de l'évènement V_2 est égale à :

a. $\frac{5}{8}$ **b.** $\frac{5}{7}$ **c.** $\frac{3}{28}$ **d.** $\frac{9}{7}$

Exercice n°4 - Fonctions et convexité (Métropole sept 21 - 1)

Cet exercice est un questionnaire à choix multiples. Pour chacune des questions suivantes, une seule des quatre réponses proposées est exacte. Une réponse exacte rapporte un point. Une réponse fausse, une réponse multiple ou l'absence de réponse à une question ne rapporte ni n'enlève de point.
Pour répondre, indiquer sur la copie le numéro de la question et la lettre de la réponse choisie.
Aucune justification n'est demandée.



Le graphique ci-contre donne la représentation graphique C_f dans un repère orthogonal d'une fonction f définie et dérivable sur $\mathbb{R}$.
On notera f' la fonction dérivée de f.
On donne les points A de coordonnées $(0;\ 5)$ et B de coordonnées $(1;\ 20)$.
Le point C est le point de la courbe C_f ayant pour abscisse $-2{,}5$. La droite (AB) est la tangente à la courbe C_f au point A.

1. On peut affirmer que :

a. $f'(-0{,}5) = 0$
b. si $x \in]-\infty;\ -0{,}5[$, alors $f'(x) < 0$
c. $f'(0) = 15$
d. la fonction dérivée f' ne change pas de signe sur $\mathbb{R}$.

2. On admet que la fonction f représentée ci-dessus est définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = (ax + b)e^x$, où a et b sont deux nombres réels et que sa courbe coupe l'axe des abscisses en son point de coordonnées $(-0{,}5\ ;\ 0)$.
On peut affirmer que :

a. $a = 10$ et $b = 5$
b. $a = 2{,}5$ et $b = -0{,}5$
c. $a = -1{,}5$ et $b = 5$
d. $a = 0$ et $b = 5$

3. On admet que la dérivée seconde de la fonction f est définie sur $\mathbb{R}$ par : $f''(x) = (10x + 25)e^x$.
On peut affirmer que :

a. La fonction f est convexe sur $\mathbb{R}$
b. La fonction f est concave sur $\mathbb{R}$
c. Le point C est l'unique point d'inflexion de C_f
d. C_f n'admet pas de point d'inflexion

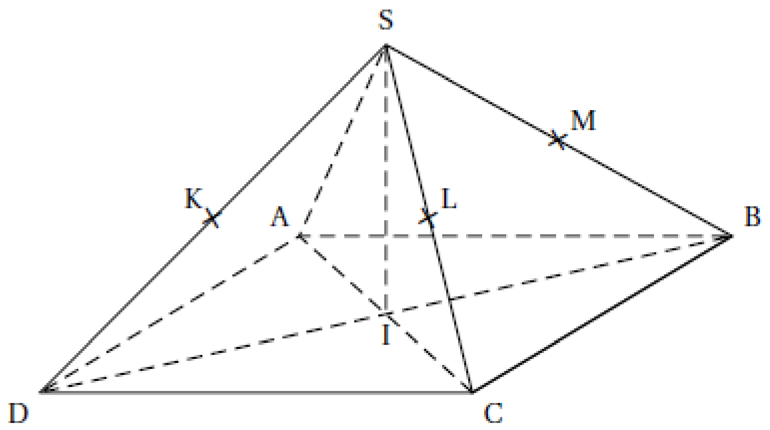
4. On considère l'algorithme suivant :
La valeur numérique renvoyée par cet algorithme lorsqu'on appelle la fonction sol() est :

```
def  sol() :
    x = 0
    f  = 5
    while f <10 :
            x = x+0.01
            f  =  (10*x+5)*exp(x)
    return x
```

a. 5,15
b. 0,26
c. 5,16
d. 0,27

Exercice n°5 - Géométrie (Métropole mars 21 - 1)

Cet exercice est un questionnaire à choix multiples. Pour chacune des questions suivantes, une seule des quatre réponses proposées est exacte.
Une réponse exacte rapporte un point. Une réponse fausse, une réponse multiple ou l'absence de réponse à une question ne rapporte ni n'enlève de point.
Pour répondre, indiquer sur la copie le numéro de la question et la lettre de la réponse choisie.
Aucune justification n'est demandée.



$SABCD$ est une pyramide régulière à base carrée $ABCD$ dont toutes les arêtes ont la même longueur.
Le point I est le centre du carré $ABCD$.
On suppose que : $IC = IB = IS = 1$.
Les points K, L et M sont les milieux respectifs des arêtes $[SD]$, $[SC]$ et $[SB]$.

1. Les droites suivantes ne sont pas coplanaires :

a. (DK) et (SD) **b.** (AS) et (IC) **c.** (AC) et (SB) **d.** (LM) et (AD)

Pour les questions suivantes, on se place dans le repère orthonormé de l'espace $(I, \overrightarrow{IC}, \overrightarrow{IB}, \overrightarrow{IS})$
Dans ce repère, on donne les coordonnées des points suivants :

$$I(0\,;\,0\,;\,0)\ ;\quad A(-1\,;\,0\,;\,0)\ ;\quad B(0\,;\,1\,;\,0)\ ;\quad C(1\,;\,0\,;\,0)\ ;\quad D(0\,;\,-1\,;\,0)\ ;\quad S(0\,;\,0\,;\,1).$$

2. Les coordonnées du milieu N de $[KL]$ sont :

a. $\left(\frac{1}{4};\frac{1}{4};\frac{1}{4}\right)$ **b.** $\left(\frac{1}{4};-\frac{1}{4};\frac{1}{2}\right)$ **c.** $\left(-\frac{1}{4};\frac{1}{4};\frac{1}{2}\right)$ **d.** $\left(-\frac{1}{2};\frac{1}{2};1\right)$

3. Les coordonnées du vecteur $\overrightarrow{AS}$ sont :

a. $\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}$ **b.** $\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}$ **c.** $\begin{pmatrix}2\\1\\-1\end{pmatrix}$ **d.** $\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$

4. Une représentation paramétrique de la droite (AS) est :

a. $\begin{cases}x=-1-t\\y=t\\z=-t\end{cases}, t\in\mathbb{R}$ **b.** $\begin{cases}x=-1+2t\\y=0\\z=1+2t\end{cases}, t\in\mathbb{R}$ **c.** $\begin{cases}x=t\\y=0\\z=1+t\end{cases}, t\in\mathbb{R}$ **d.** $\begin{cases}x=-1-t\\y=1+t\\z=1-t\end{cases}, t\in\mathbb{R}$

5. Une équation cartésienne du plan (SCB) est :

a. $y+z-1=0$ **b.** $x+y+z-1=0$ **c.** $x-y+z=0$ **d.** $x+z-1=0$