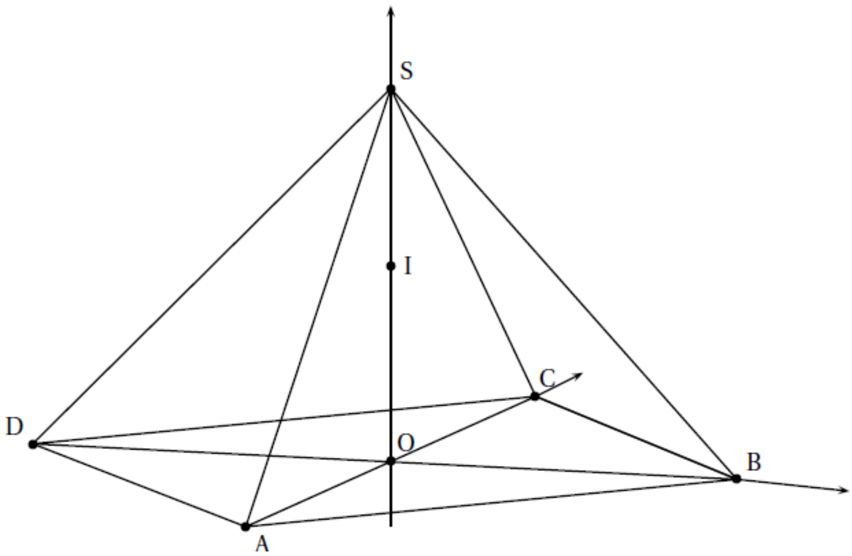
Sujet d'entraînement n°1

Exercice 1

On considère la pyramide régulière $SABCD$ de sommet S constituée de la base carrée $ABCD$ et de triangles équilatéraux représentée ci-contre.

Le point O est le centre de la base $ABCD$ avec $OB = 1$.
On rappelle que le segment $[SO]$ est la hauteur de la pyramide et que toutes les arêtes ont la même longueur.



1. Justifier que le repère $(O\ ;\ \overrightarrow{OB}\ ;\ \overrightarrow{OC}\ ;\ \overrightarrow{OS})$ est orthonormé.

Dans la suite de l'exercice, on se place dans le repère $(O\ ;\ \overrightarrow{OB}\ ;\ \overrightarrow{OC}\ ;\ \overrightarrow{OS})$

2. On définit le point K par la relation $\overrightarrow{SK} = \frac{1}{3}\overrightarrow{SD}$ et on note I le milieu du segment $[SO]$.

- **a.** Déterminer les coordonnées du point K.
- **b.** En déduire que les points B, I et K sont alignés.
- **c.** On note L le point d'intersection de l'arête $[SA]$ avec le plan (BCI).
  Justifier que les droites (AD) et (KL) sont parallèles.
- **d.** Déterminer les coordonnées du point L.

3. On considère le vecteur $\vec{n} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ dans le repère$(O\ ;\ \overrightarrow{OB}\ ;\ \overrightarrow{OC}\ ;\ \overrightarrow{OS})$

- **a.** Montrer que $\vec{n}$ est un vecteur normal au plan (BCI).
- **b.** Montrer que les vecteurs $\vec{n}$, $\overrightarrow{AS}$ et $\overrightarrow{DS}$ sont coplanaires.
- **c.** Quelle est la position relative des plans (BCI) et (SAD) ?

Exercice 2

On considère deux suites (u_n) et (v_n) :

• la suite (u_n) définie par $u_0 = 1$ et pour tout entier naturel n : $u_{n+1} = 2u_n - n + 3$

• la suite (v_n) définie, pour tout entier naturel n, par $v_n = 2^n$

Partie A : Conjectures

Florent a calculé les premiers termes de ces deux suites à l'aide d'un tableur. Une copie d'écran est donnée ci-contre.

	A	B	C
1	rang n	terme u_n	terme v_n
2	0	1	1
3	1	5	2
4	2	12	4
5	3	25	8
6	4	50	16

1. Quelles formules ont été entrées dans les cellules B3 et C3 pour obtenir par copie vers le bas les termes des deux suites ?

2. Pour les termes de rang 10, 11, 12 et 13 Florent obtient les résultats suivants :

12	10	3 080	1 024
13	11	6 153	2 048
14	12	12 298	4 096
15	13	24 587	8 192

Conjecturer les limites des suites (u_n) et $\left(\frac{u_n}{v_n}\right)$.

Partie B : Étude de la suite (u_n)

1. Démontrer par récurrence que, pour tout entier naturel n, on a $u_n = 3 \times 2^n + n - 2$

2. Déterminer la limite de la suite (u_n)

3. Déterminer le rang du premier terme de la suite supérieur à 1 million.

Partie C : Étude de la suite $\left(\frac{u_n}{v_n}\right)$

1. Démontrer que la suite $\left(\frac{u_n}{v_n}\right)$ est décroissante à partir du rang 3.

2. On admet que, pour tout entier n supérieur ou égal à 4, on a : $0 < \frac{n}{2^n} \leq \frac{1}{n}$

Déterminer la limite de la suite $\left(\frac{u_n}{v_n}\right)$

Exercice 3

Partie I

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par

$$f(x) = x - e^{-2x}$$

On appelle Γ la courbe représentative de la fonction f dans un repère orthonormé $(O;\ \vec{\imath};\ \vec{\jmath})$

1. Déterminer les limites de la fonction f en $-\infty$ et en $+\infty$.

2. Étudier le sens de variation de la fonction f sur $\mathbb{R}$ et dresser son tableau de variation.

3. Montrer que l'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution α sur $\mathbb{R}$, dont on donnera une valeur approchée à 10^{-2} près.

4. Déduire des questions précédentes le signe de $f(x)$ suivant les valeurs de x.

Partie II

Dans le repère orthonormé $(O;\ \vec{\imath};\ \vec{\jmath})$, on appelle $\mathcal{C}$ la courbe représentative de la fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$g(x) = e^{-x}$$

La courbes $\mathcal{C}$ et la courbe Γ (qui représente la fonction f de la **Partie I**) sont tracées sur le graphique donné en annexe qui est à compléter et à rendre avec la copie.
Le but de cette partie est de déterminer le point de la courbe $\mathcal{C}$ le plus proche de l'origine O du repère et d'étudier la tangente à $\mathcal{C}$ en ce point.

1. Pour tout nombre réel t , on note M le point de coordonnées $(t\ ;\ e^{-t})$ de la courbe $\mathcal{C}$.
On considère la fonction h qui, au nombre réel t , associe la distance OM .
On a donc : $h(t) = OM$, c'est-à-dire :

$$h(t) = \sqrt{t^2 + e^{-2t}}$$

a. Montrer que, pour tout nombre réel t ,

$$h'(t) = \frac{f(t)}{\sqrt{t^2 + e^{-2t}}}$$

où f désigne la fonction étudiée dans la **Partie** I.

b. Démontrer que le point A de coordonnées $(\alpha\ ;\ e^{-\alpha})$ est le point de la courbe $\mathcal{C}$ pour lequel la longueur OM est minimale.
Placer ce point sur le graphique donné en annexe, à rendre avec la copie.

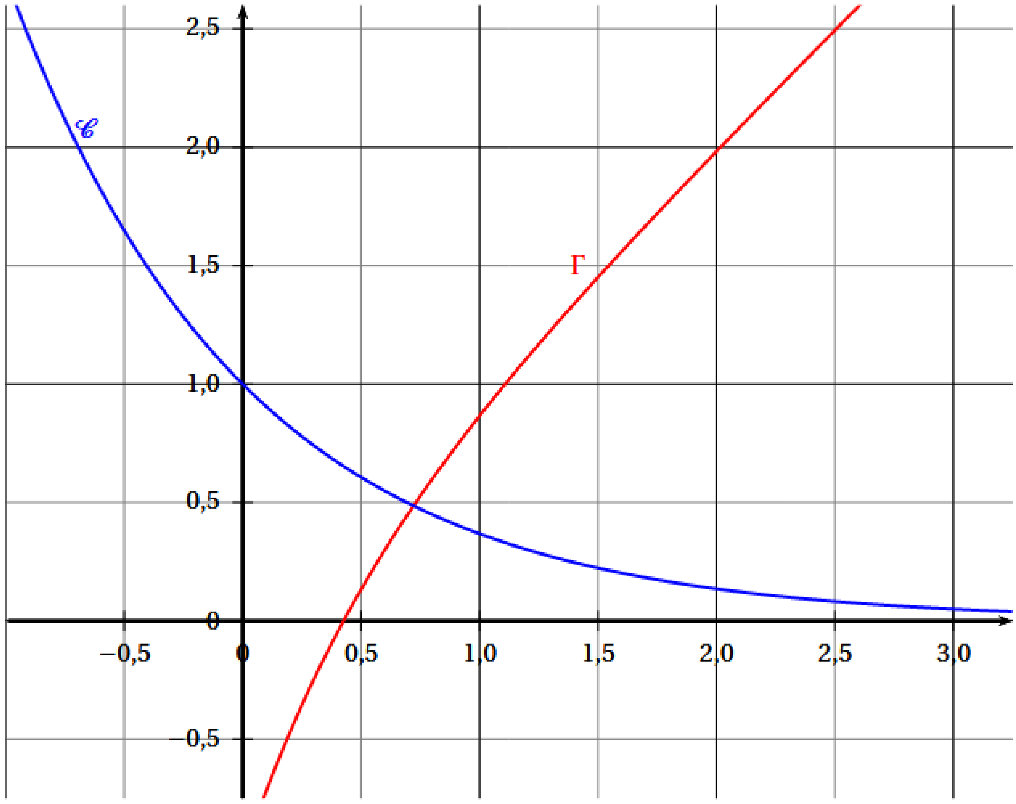
2. On appelle $\mathcal{T}$ la tangente en A à la courbe $\mathcal{C}$.

a. Exprimer en fonction de α le coefficient directeur de la tangente $\mathcal{T}$.

On rappelle que le coefficient directeur de la droite (OA) est égal à $\frac{e^{-\alpha}}{\alpha}$.
On rappelle également le résultat suivant qui pourra être utilisé sans démonstration :
Dans un repère orthonormé du plan, deux droites D et D' de coefficients directeurs respectifs m et m' sont perpendiculaires si, et seulement si le produit mm' est égal à -1.

b. Démontrer que la droite (OA) et la tangente $\mathcal{T}$ sont perpendiculaires.
Tracer ces droites sur le graphique donné en annexe, à rendre avec la copie.

Annexe :



Exercice 4

Dans un supermarché, on étudie la vente de bouteilles de jus de fruits sur une période d'un mois.

- 40 % des bouteilles vendues sont des bouteilles de jus d'orange ;
- 25 % des bouteilles de jus d'orange vendues possèdent l'appellation « pur jus ».

Parmi les bouteilles qui ne sont pas de jus d'orange, la proportion des bouteilles de « pur jus » est notée x, où x est un réel de l'intervalle [0 ; 1].
Par ailleurs, 20 % des bouteilles de jus de fruits vendues possèdent l'appellation «pur jus ».

On prélève au hasard une bouteille de jus de fruits passée en caisse. On définit les évènements suivants :
R : la bouteille prélevée est une bouteille de jus d'orange ;
J : la bouteille prélevée est une bouteille de « pur jus ».

Partie A

1. Représenter cette situation à l'aide d'un arbre pondéré.

2. Déterminer la valeur exacte de x.

3. Une bouteille passée en caisse et prélevée au hasard est une bouteille de «pur jus ».
Calculer la probabilité que ce soit une bouteille de jus d'orange.

Partie B

Afin d'avoir une meilleure connaissance de sa clientèle, le directeur du supermarché fait une étude sur un lot des 500 dernières bouteilles de jus de fruits vendues.
On note X la variable aléatoire égale au nombre de bouteilles de « pur jus » dans ce lot.
On admettra que le stock de bouteilles présentes dans le supermarché est suffisamment important pour que le choix de ces 500 bouteilles puisse être assimilé à un tirage au sort avec remise.

1. Déterminer la loi suivie par la variable aléatoire X. On en donnera les paramètres.

2. Déterminer la probabilité pour qu'au moins 75 bouteilles de cet échantillon de 500 bouteilles soient de « pur jus ». On arrondira le résultat au millième.