SUJET D'ENTRAÎNEMENT AU BAC
(avec fiches de cours)

SESSION décembre 2021

MATHEMATIQUES

SPECIALITE MATHEMATIQUES

Durée de l'épreuve : 2 heures

Ce sujet comporte 6 **pages**.

LA PAGE 6 EST UNE ANNEXE A RENDRE AVEC LA COPIE

L'utilisation d'une calculatrice ainsi que l'utilisation de fiches de cours sont autorisées.
L'usage du téléphone portable est interdit ; aucun échange de calculatrice n'est permis entre les candidats, ni d'aucun document, d'aucun formulaire, d'aucune fiche de cours.

Le sujet est composé de 4 exercices indépendants.

Dans chaque exercice, le candidat peut admettre un résultat précédemment donné dans le texte pour aborder les questions suivantes, à condition de l'indiquer clairement sur la copie.

Le candidat est invité à faire figurer sur la copie toute trace de recherche, même incomplète ou non fructueuse, qu'il aura développée. Il est rappelé que la qualité de la rédaction et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies.

EXERCICE 1 (4 points)

Cet exercice est un questionnaire à choix multiples. Pour chacune des questions suivantes, une seule des quatre réponses proposées est exacte. Une réponse exacte rapporte un point. Une réponse fausse, une réponse multiple ou l'absence de réponse à une question ne rapporte ni n'enlève de point.
Pour répondre, indiquer sur la copie le numéro de la question et la lettre de la réponse choisie.
Aucune justification n'est demandée.

Question 1.

On considère la suite (u_n) définie par : $u_n = \frac{n^4+n}{-3+n}$. La limite de cette suite est :

a. $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = +\infty$ **b.** $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = -\infty$ **c.** $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = -\frac{1}{3}$ **d.** $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = 0$

Question 2.

On se place dans un repère $(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k})$.
On considère les points $A(1; -2; 2)$, $B(4; -3; 6)$, $C(4; -1; 7)$ et $D(-3; 0; -3)$.
Ces quatre points sont :

a. alignés **b.** coplanaires **c.** confondus **d.** non coplanaires

Question 3.

L'ensemble des solutions de l'inéquation $1 - x > 2x^2$ est :

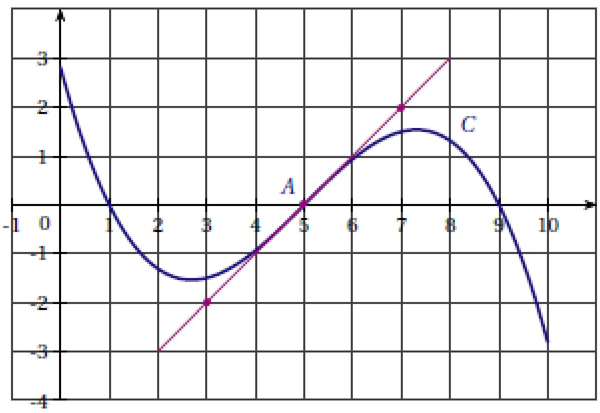
a. $S = \left]-\frac{1}{2}; 1\right[$ **b.** $S = \left]-1; \frac{1}{2}\right[$

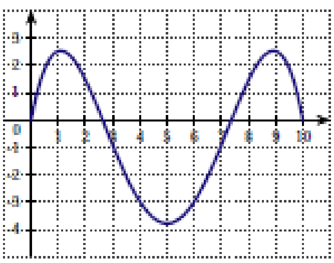
c. $S =]-\infty; -1[\cup \left]\frac{1}{2}; +\infty\right[$ **d.** $S = \left]-\frac{1+\sqrt{7}}{4}; -\frac{1-\sqrt{7}}{4}\right[$

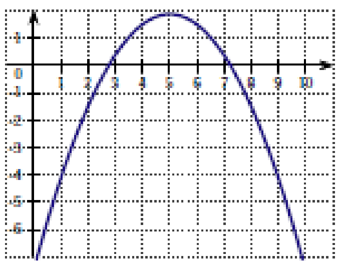
Question 4.

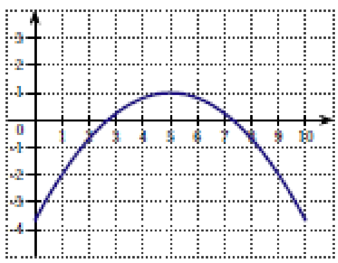
On donne ci-contre la représentation graphique $\mathcal{C}$ d'une fonction f définie sur [0 ; 10].
La tangente à la courbe $\mathcal{C}$ au point A d'abscisse 5 est tracée.

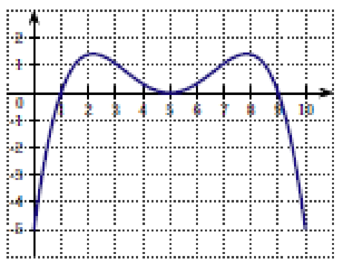
Parmi les quatre courbes ci-dessous, déterminer laquelle représente graphiquement la fonction dérivée f' de la fonction f .




a. Courbe 1


b. Courbe 2


c. Courbe 3


d. Courbe 4

EXERCICE 2 (5 points)

On administre à un patient un médicament par injection intraveineuse. La quantité de médicament dans le sang diminue en fonction du temps.

Une machine effectue à l'instant 0 une injection de 10 mL de médicament. On estime que 20 % du médicament est éliminé par minute.

Toutes les minutes, la machine injecte à nouveau 1 mL de médicament.

Pour tout entier naturel n, on note u_n la quantité de médicament, en mL, restant dans le sang au bout de n minutes. Ainsi $u_0 = 10$.

1. **a**. Calculer u_1 et u_2. Interpréter le résultat dans le contexte.

b. Justifier que, pour tout entier n, on a : $u_{n+1} = 0{,}8u_n + 1$.

c. Au bout de combien de temps la quantité de médicament passe en dessous des 6 mL ? Justifier.

2. On introduit la suite (w_n) définie pour tout entier naturel *n* par : $w_n = u_n - 5$.

a. Montrer que (w_n) est une suite géométrique. Préciser la raison et le premier terme de cette suite.

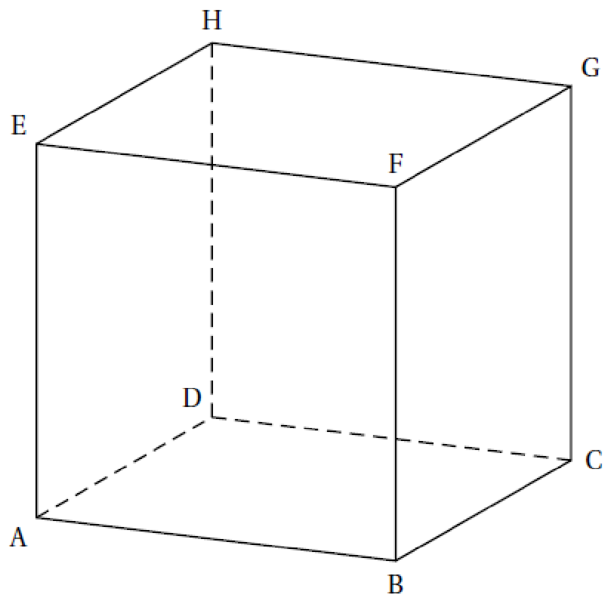
b. En déduire que, pour tout entier naturel n, on a : $u_n = 5 \times (1 + 0{,}8^n)$.

c. Quelle est la limite de la suite (u_n) ? Quelle interprétation peut-on en donner dans ce contexte.

EXERCICE 3 (5,5 points)

La figure ci-contre représente un cube $ABCDEFGH$.
Elle est reproduite sur **l'annexe 1, à rendre avec la copie.**

Toutes les constructions demandées doivent être faite sur l'annexe 1, à rendre avec la copie.



Dans le repère $\left(C\ ;\ \overrightarrow{CD}\ ;\ \overrightarrow{CB}\ ;\overrightarrow{CG}\right)$, on considère les points M, N et P de coordonnées respectives :

$$M\left(1; 1; \frac{3}{4}\right), \qquad N\left(0; \frac{1}{2}; 1\right), \qquad P\left(1; 0; -\frac{5}{4}\right)$$

1. Placer M, N et P sur la figure donnée **en annexe**.

2. a. Déterminer les coordonnées des vecteurs $\overrightarrow{MN}$ et $\overrightarrow{MP}$.
En déduire que les points M, N et P ne sont pas alignés.

b. Calculer la longueur MN et les coordonnées du milieu I du segment $[MP]$.

3. a. Donner une représentation paramétrique du plan (MNP).

b. Le point C appartient-il au plan (MNP) ? Justifier.

4. a. Quelle est l'intersection des plans (MNP) et (HED) ?
Tracer cette intersection sur la figure en annexe.

b. On appelle K l'intersection de la droite (EH) et du plan (MNP).
Placer le point K sur la figure en annexe.

EXERCICE 4 (5,5 points)

Partie A

On considère g la fonction définie sur $[-1; 5]$ par :

$$g(x) = 1 + xe^{-x}$$

On note C_g la courbe représentative de la fonction f dans un repère orthonormé du plan et g' la fonction dérivée de g.

1. Donner les valeur exactes simplifiées de $g(-1)$ et de $g(1)$.

2. a. Montrer que, pour tout réel $x \in [-1; 5]$, on a : $g'(x) = (1 - x)e^{-x}$.

b. En déduire le sens de variation de la fonction g sur l'intervalle $[-1; 5]$.

3. a. Montrer que l'équation $g(x) = 0$ admet une unique solution α sur l'intervalle $[-1 ;\ 5]$.

b. Donner un encadrement de α à 10^{-1} près.

c. En déduire le tableau de signe de g sur l'intervalle $[-1; 5]$.

4. Déterminer une équation de la tangente T à C_g au point d'abscisse 0.

Partie B BONUS (à ne faire qu'après tout le reste)

Pour tout entier $n > 0$, on définit sur l'intervalle $[-1; 1]$ une fonction g_n par :

$$g_n(x) = n + xe^{-nx}$$

1. Dresser le tableau de variation de g_n sur l'intervalle $[-1; 1]$.

2. En déduire le maximum de g_n sur l'intervalle $[-1; 1]$.

3. On admettra pour cette question que, pour tout $n > 0$, l'expression $n - e^n$ est négative.
Montrer qu'il existe une seule valeur α_n dans $[-1; 1]$ telle que $g_n(\alpha_n) = 0$.

Annexe 1 - Exercice 3 - questions 1 & 4