

Corrigé Exercice 1

- 1) a. dans $\mathbb{N}$: $D(36) = \{1 ; 2 ; 3 ; 4 ; 6 ; 9 ; 12 ; 18 ; 36\}$
 dans $\mathbb{N}$: $D(49) = \{1 ; 7 ; 49\}$ et dans $\mathbb{Z}$: $D(49) = \{1 ; 7 ; 49 ; -1 ; -7 ; -49\}$
 dans $\mathbb{N}$: $D(126) = \{1 ; 2 ; 3 ; 6 ; 7 ; 9 ; 14 ; 18 ; 21 ; 42 ; 63 ; 126\}$
- b. Dans $\mathbb{N}$, $D(12) = \{1 ; 2 ; 3 ; 4 ; 6 ; 12\}$ et $D(50) = \{1 ; 2 ; 5 ; 10 ; 25 ; 50\}$
 Donc les diviseurs communs à 12 et 50 mais dans $\mathbb{Z}$: $\{-2 ; -1 ; 1 ; 2\}$
- c. On cherche les multiples de 17 dans l'intervalle $[-50 ; 75]$
 Les premiers multiples positifs de 17 sont : 0 ; 17 ; 34 ; 51 ; 68 ...
 Donc dans l'intervalle : $\{-34 ; -17 ; 0 ; 17 ; 34 ; 51 ; 68\} \Rightarrow$ **7 multiples de 17**
- d. On cherche x et y entiers naturels tels que $xy = 30$ donc des diviseurs de 30
 $\Rightarrow$ Or $D(30) = \{1 ; 2 ; 3 ; 5 ; 6 ; 10 ; 15 ; 30\}$
Les solutions sont donc les couples (1 ; 30) ; (2 ; 15) ; (3 ; 10) et (5 ; 6)
- 2) a. $n = 5k$ avec $k \in \mathbb{Z}$ b. $n = 3k$ avec $k \in \mathbb{Z}$ c. on a $n + 5 = 6k \Leftrightarrow n = 6k - 5$ avec $k \in \mathbb{Z}$
- 3) a. $D(220) = \{1 ; 2 ; 4 ; 5 ; 10 ; 11 ; 20 ; 22 ; 44 ; 55 ; 110 ; 220\}$ pour les diviseurs stricts, on enlève 220
 Donc $S(220) = 1 + 2 + \dots + 110 =$ **284**
 $D(284) = \{1 ; 2 ; 4 ; 71 ; 142 ; 284\}$ pour les diviseurs stricts, on enlève 284
 Donc $S(284) = 1 + 2 + 4 + 71 + 142 =$ **220** **CQFD**
- b. $D(48) = \{1 ; 2 ; 3 ; 4 ; 6 ; 8 ; 12 ; 16 ; 24 ; 48\}$
 Attention il s'agit de la somme de tous les diviseurs Donc $S(48) = 1 + 2 + \dots + 48 =$ **124**
 $D(75) = \{1 ; 3 ; 5 ; 15 ; 25 ; 75\}$ Donc $S(75) = 1 + 3 + \dots + 75 =$ **124**
La somme des diviseurs est la même pour les deux nombres.
 On peut aussi remarquer que c'est la somme de ces deux nombre plus 1 ($124 = 48 + 75 + 1$) et que les sommes des diviseurs stricts sont égales au 2eme nombre plus 1 ($1 + 2 + \dots + 24 = 76$ et $1 + 3 + \dots + 25 = 49$)

Corrigé Exercice 2

- 1) a. Les entiers $n - 4$ et $p + 3$ doivent être des couples de diviseurs de 4 : soit 1×4 , soit 2×2 ou 4×1
- b. Soit $\begin{cases} n - 4 = 1 \\ p + 3 = 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} n = 5 \\ p = 1 \end{cases}$
 Soit $\begin{cases} n - 4 = 2 \\ p + 3 = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} n = 6 \\ p = -1 \end{cases} \Rightarrow$ solution impossible dans les entiers naturels
 Soit $\begin{cases} n - 4 = 4 \\ p + 3 = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} n = 8 \\ p = -2 \end{cases} \Rightarrow$ solution impossible dans les entiers naturels
 Au final, il n'y a qu'un couple possible : **(5 ; 1)**
- 2) $x^2 = y^2 + 15 \Leftrightarrow x^2 - y^2 = 15 \Leftrightarrow (x - y)(x + y) = 15$
 Les diviseurs positifs de 15 sont $D(15) = \{1 ; 3 ; 5 ; 15\}$. On a forcément $x > y$
 Soit $\begin{cases} x - y = 1 \\ x + y = 15 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x = 16 \\ y = 15 - x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 8 \\ y = 7 \end{cases}$ Soit $\begin{cases} x - y = 3 \\ x + y = 5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x = 8 \\ y = 5 - x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 4 \\ y = 1 \end{cases}$
Les couples solutions sont (8 ; 7) et (4 ; 1)

$$3) x^2 = 9y^2 + 7 \Leftrightarrow (x - 3y)(x + 3y) = 7 \text{ avec } D(7) = \{-7; -1; 1; 7\}$$

$$\text{Soit } \begin{cases} x - 3y = -7 \\ x + 3y = -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -7 + 3y \\ 6y = 6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -4 \\ y = 1 \end{cases} \Rightarrow \text{Couple } (-4; 1)$$

$$\text{Soit } \begin{cases} x - 3y = 7 \\ x + 3y = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 7 + 3y \\ 6y = -6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 4 \\ y = -1 \end{cases} \Rightarrow \text{Couple } (4; -1)$$

$\Rightarrow$ En fait si $(x; y)$ est solution, il est simple à démontrer que $(-x; -y)$ l'est aussi, puisque $(-x)^2 = x^2$

$$\text{Soit } \begin{cases} x - 3y = 1 \\ x + 3y = 7 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 + 3y \\ 6y = 6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 4 \\ y = 1 \end{cases} \Rightarrow \text{Couple } (4; 1) \text{ et (par conséquent) Couple } (-4; -1)$$

Les couples solutions sont $(-4; -1); (4; -1); (-4; 1)$ et $(4; 1)$

Corrigé Exercice 3

1) a. $S_0 = 8$ On a $S_1 = \frac{S_0}{2} = 4$ donc $S_2 = \frac{S_1}{2} = 2$; $S_3 = \frac{2}{2} = 1$ et $S_4 = 3 \times 1 + 1 = 4$ et c'est reparti...

b. $S_0 = 17$; $S_1 = 3 \times 17 + 1 = 52$; $S_2 = \frac{52}{2} = 26$; $S_3 = \frac{26}{2} = 13$; $S_4 = 3 \times 13 + 1 = 40$
 $S_5 = \frac{40}{2} = 20$; $S_6 = \frac{20}{2} = 10$; $S_7 = \frac{10}{2} = 5$; $S_8 = 5 \times 3 + 1 = 16$; $S_9 = \frac{16}{2} = 8$ et comme a.

2) a. S_p est un multiple de 3, alors il existe un entier naturel k tel que : $S_p = 3k$

Raisonnement par l'absurde

Si le terme S_{p-1} est impair, alors on a $S_p = 3S_{p-1} + 1 \Leftrightarrow S_{p-1} = \frac{S_p - 1}{3} = \frac{3k - 1}{3} = k - \frac{1}{3}$

Or S_{p-1} est un forcément un entier naturel (comme tous les termes des suites de Syracuse), donc ce n'est pas possible

Le terme S_{p-1} est forcément pair, et on a $S_p = \frac{S_{p-1}}{2} \Leftrightarrow S_{p-1} = 2S_p = 6k$ qui est bien un multiple de 3

b. $S_{p-1} = 6k$ il est bien pair, et multiple de 3. On peut donc en conclure que S_{p-2} est aussi multiple de 6 (pair et multiple de 3, il s'agit d'une forme de récurrence à l'envers.) $S_{p-2} = 12k = 2^2 \times S_p$

On arrive bien à $S_0 = 2^p S_p$

Corrigé Exercice 4

1) a) soit n un entier, et $n + 1$ sont consécutif.

Disjonction de cas :

Si n est pair, alors $2|n$ et donc $2|n(n + 1) \Rightarrow$ **Le produit est pair**

Si n est impair, alors c'est $n + 1$ qui est pair. On a $2|(n + 1)$ et donc $2|n(n + 1) \Rightarrow$ **Le produit est pair**

b) les 3 entiers consécutifs s'écrivent $n, n + 1$ et $n + 2$.

On a $n + (n + 1) + (n + 2) = 3n + 3 = 3(n + 1)$

Donc 3 divise bien la somme de 3 entiers consécutifs (propriété généralisable à p entiers consécutifs, pour p impair)

c) Dans $\mathbb{Z}$, oui... car pour chaque diviseur positif, il y a l'opposé...

Dans $\mathbb{N}$ non : pr exemple 9 a pour diviseurs $\{1; 3; 9\}$... En fait **les seuls nombres qui ont un nombre impair de diviseurs dans $\mathbb{N}$ sont les carrés parfaits**

d) Disjonction de cas :

Si n est pair, alors $n = 2p$ et $n^2 = 4p^2 = 2 \times (2p^2) \Rightarrow$ **n^2 est pair**

Si n est impair, alors $n = 2p + 1$ et $n^2 = 4p^2 + 4p + 1 \Leftrightarrow n^2 = 2 \times (2p^2 + 2p) + 1 \Rightarrow$ **n^2 est impair**

Oui, n et n^2 ont la même parité

2) a) Raisonnement par l'absurde

Si $14 \mid n$ et $n \mid 100$ alors $14 \mid 100 \Rightarrow$ ce qui est faux.

Donc on ne peut pas trouver d'entier qui soit à la fois multiple de 14 et diviseur de 100.

b) n est pair $\Rightarrow n = 2p$ alors $n(n^2 + 20) = 2p(4p^2 + 20) = 2p \times 4(p^2 + 5)$

On a donc $n(n^2 + 20) = 8 \times p(p^2 + 5) \Rightarrow$ **8 divise bien $n(n^2 + 20)$**

c) $\Delta = 9 - 8 = 1 \Rightarrow n_1 = \frac{-3+1}{2} = -1$ et $n_2 = \frac{-3-1}{2} = -2$

Donc $n^2 + 3n + 2 = (n + 1)(n + 2)$ produit d'entiers $\Rightarrow$ **$n^2 + 3n + 2$ est bien divisible par $n + 2$**

3) a) **Faux** : D'abord, rien ne prouve que $\sqrt{n}$ soit un entier...

Contre-ex : $a = 2$ et $n = 12 \Rightarrow a^2 = 4$ divise 12 mais 2 ne divise pas $\sqrt{12}$

b) Vrai : $b = ka$ et $c = k'a \Rightarrow bc = (kk') \times a^2$

c) Vrai : Si $a^2 + b^2 = 2p$ alors $(a + b)^2 = (a^2 + b^2) + 2ab = 2p + 2ab = 2(p + ab) \Rightarrow$ **$(a + b)^2$ est pair**

d) Faux : Contre-ex : $a = 2$ et $b = 3$; $m = 7$ et $n = 14 \Rightarrow d = 7$ divise $ma + nb = 7 \times 2 + 14 \times 3$
mais 7 ne divise ni 2, ni 3 (pour fabriquer le contre-exemple, il suffit de prendre m et n multiple d'un même nombre)

4) a. Initialisation : pour $n = 0$ on a $5^{2n} + 3 = 5^0 + 3 = 1 + 3 = 4$ est bien divisible par 4

$\Rightarrow$ **La propriété est vraie pour $n = 0$**

Hypothèse : On suppose qu'il existe un entier n pour lequel $5^{2n} + 3$ est divisible par 4

C'est-à-dire qu'il existe un entier k tel que $5^{2n} + 3 = 4k$ ou encore $5^{2n} = 4k - 3$

Hérédité : $5^{2(n+1)} + 3 = 5^{2n} \times 5^2 + 3 = 25 \times (4k - 3) + 3$ par hypothèse de récurrence

$5^{2(n+1)} + 3 = 4 \times (25k) - 75 + 3 = 4 \times (25k) - 72 = 4 \times (25k) - 4 \times 18$

$5^{2(n+1)} + 3 = 4 \times (25k - 18)$

$\Rightarrow$ **$5^{2(n+1)} + 3$ est bien un multiple de 4 : la propriété est vraie au rang $n + 1$**

Conclusion : pour tout entier naturel n , le nombre $5^{2n} + 3$ est divisible par 4

b. Initialisation : pour $n = 0$ on a $5n^3 + n = 5 \times 0^3 + 0 = 0$ est un multiple de tout nombre, donc de 6

$\Rightarrow$ **La propriété est vraie pour $n = 0$**

Hypothèse : On suppose qu'il existe un entier n pour lequel 6 divise $5n^3 + n$

C'est-à-dire qu'il existe un entier k tel que $5n^3 + n = 6k$

Hérédité : $5(n + 1)^3 + (n + 1) = 5(n^3 + 3n^2 + 3n + 1) + n + 1 = 5n^3 + n + 15n^2 + 15n + 6$

$= 6k + 15n^2 + 15n + 6$ par hypothèse de récurrence

$5(n + 1)^3 + (n + 1) = 6(k + 1) + 15n(n + 1)$

Or $n(n + 1)$ est le produit de deux entiers consécutifs donc est pair et divisible par 2 :

on peut écrire $n(n + 1) = 2p$.

$5(n + 1)^3 + (n + 1) = 6(k + 1) + 30p = 6(k + 1 + 5p)$

$\Rightarrow$ **$5(n + 1)^3 + (n + 1)$ est bien un multiple de 6 : la propriété est vraie au rang $n + 1$**

Conclusion : pour tout entier naturel n , 6 divise $5n^3 + n$

Corrigé Exercice 5

1) a) $31 = 9 \times 3 + 4 \Rightarrow q = 3 \text{ et } r = 4$

b) $42 = -8 \times (-5) + 2 \Rightarrow q = -5 \text{ et } r = 2$

c) $15 = (-3) \times (-5) \Rightarrow q = -5 \text{ et } r = 0$ (15 est un multiple de -3)

d) $17 = -12 \times (-2) + 5 \Rightarrow q = -2 \text{ et } r = 4$

e) $59 = 56 + 3 = 7 \times 8 + 3 \Rightarrow q = 8 \text{ et } r = 3$

f) $-59 = -63 + 4 = 7 \times (-9) + 4 \Rightarrow q = -9 \text{ et } r = 4$

g) $18 = 25 \times 0 + 18 \Rightarrow q = 0 \text{ et } r = 18$

h) $271 = 19 \times 14 + 5 \Rightarrow q = 14 \text{ et } r = 5$

i) $332 = 27 \times 12 + 8 \Rightarrow q = 12 \text{ et } r = 8$

2) a) $496 = 13 \times 36 + 2 \times 13 + 2 = 13 \times 38 + 2 \Rightarrow q = 38 \text{ et } r = 2$

b) $496 = 36 \times 13 + 28 \Rightarrow q = 13 \text{ et } r = 28$

c) $496 = 13 \times (2 \times 18) + (18 + 10) = (13 \times 2 + 1) \times 18 + 10 = 27 \times 18 + 10 \Rightarrow q = 27 \text{ et } r = 10$

d) $496 = 13 \times (3 \times 12) + (2 \times 12 + 4) = (13 \times 3 + 2) \times 12 + 4 = 41 \times 12 + 4 \Rightarrow q = 41 \text{ et } r = 4$

e) $496 = 41 \times (2 \times 6) + 4 = 82 \times 6 + 4 \Rightarrow q = 82 \text{ et } r = 4$

Corrigé Exercice 6

a) Soit a et b les deux nombres, tels que $a > b$.

$$\text{On a } \begin{cases} a - b = 116 \\ a = 4b + 8 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 4b + 8 - b = 116 \\ a = 4b + 8 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3b = 108 \\ a = 4b + 8 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b = 36 \\ a = 4 \times 36 + 8 = 152 \end{cases}$$

b) $n = 69q + 35 = 75q + 17 \Leftrightarrow 6q = 18 \Leftrightarrow q = 3$ on a $n = 69 \times 3 + 35 = 242$ (ou $75 \times 3 + 17$)

c) $n = 152q + 13 = 147q + 98 \Leftrightarrow 152q - 147q = 98 - 13 \Leftrightarrow 5q = 85 \Leftrightarrow q = 17$

Donc $n = 152 \times 17 + 13 = 2597$ (ou $147 \times 17 + 98$)

d) $225 = qb + 4 \Leftrightarrow qb = 225 - 4 = 221$ Donc b est un diviseur de 221, avec $b > 4$.

Or $D(221) = \{1; 13; 17; 221\}$

Donc b peut prendre les valeurs **13 ; 17 et 221** ($225 = 13 \times 17 + 4$ ou $225 = 1 \times 221 + 4$)

e) $n = 4q + r$ et on a $q = 2r \Rightarrow n = 4 \times 2r + r = 9r$ mais avec $r < 4$

ce sont tous les premiers multiples de 9 : $n \in \{0; 9; 18; 27\}$

Corrigé Exercice 7

a) $6n^2 + n - 8 = (2n + 3)(3n - 4) + 4$ b) $3n^2 - 4n - 10 = (n - 3)(3n + 5) + 5$