Probabilités : formalisme et définitions

	Notation	Définitions et exemples
Univers	Ω	Ensemble de toutes les issues possibles (ou éventualités) de l'expérience *Par exemple* : $\Omega = \{4 ; 5 ; 6 ; 7 ; 8 ; 9\}$
Éventualité Issue	i	Un des résultats possibles de l'expérience *Par exemple* : 7
Évènement	*Lettre majuscule*	Ensemble d'issues de l'expérience *ex :* $E = \{4 ; 5 ; 6 ; 7\}$ *ou* $F = \{5 ; 7 ; 9\}$
Évènement impossible	$\emptyset$	Ne contient aucune issue, ne peut jamais se réaliser *ex : « obtenir 3 »*
Évènement certain	Ω	Contient toutes les issues de l'univers, se réalise toujours *ex : « obtenir un nombre entre 1 et 10 »*
Évènement contraire	$\overline{E}$	Contient toutes les issues de l'univers qui n'appartiennent PAS à l'évènement E. C'est l'univers, privé de E (ou **Ω\E** : tout sauf E) *ex :* $\overline{E} = \{ 8 ; 9\}$
Intersection d'évènements	$\cap$	Contient les issues qui appartiennent à la fois à E et à F *ex :* $E \cap F = \{ 5 ; 7 \}$
Union d'évènements	$\cup$	Contient toutes les issues de E et de F *ex :* $E \cup F = \{4 ; 5 ; 6 ; 7 ; 9\}$

Définition :

On définit une loi de probabilité *p* sur un univers □, en associant à chaque issue sa quantité de chance de se réaliser. Il s'agit d'une **fonction**.

$$\boldsymbol{p} : \quad \boldsymbol{i} \mapsto \boldsymbol{p(i)}$$

probabilité que l'issue i a de se réaliser, souvent notée $\boldsymbol{p_i}$

Propriété :

$$\sum_{i=1}^{n} p_i = 1$$

La somme des probabilités de toutes les issues est égale à 1

Remarque :

Ne <u>jamais</u> oublier que $\boldsymbol{p_i \in [0; 1]}$

avec $p(\emptyset) = 0$ *et* $p(\Omega) = 1$

Probabilité d'évènement		
	Cas général	La probabilité d'un évènement, c'est la **somme des probabilités** de ses issues *Ex :* $\boldsymbol{p(E) = p(4) + p(5) + p(6) + p(7)}$
	Équiprobabilité	Dans ce cas, la probabilité d'un évènement c'est le nombre de ses issues divisé par le nombre total d'issues dans l'univers $\boldsymbol{p(E) = \frac{nombre(E)}{nombre(\Omega)}}$ *Ex : sur* Ω, on a ∀ *i :* $p_i = \frac{1}{6}$ *et* $p(E) = \frac{4}{6} = \frac{2}{3}$

Formules :

► $\boldsymbol{p(E) = 1 - p(E)}$

Ou : $p(E) + p(E) = 1$

► $\boldsymbol{p(E \cup F) = p(E) + p(F) - p(E \cap F)}$

Ou : $p(E) + p(F) = p(E \cup F) + p(E \cap F)$

Savoir Pb.1 : Introduction

Exemple 1 : Une agence de voyage effectue un sondage auprès de ses clients.
Elle répertorie ses clients en 2 catégories : les groupes et les personnes seules.
Elle les interroge sur leur destination de vacances.
Sur 300 clients interrogés, 189 partent en groupe, et parmi ceux-là, 55 % partent en France.
De plus, 75 % des personnes seules partent à l'étranger.
On choisit au hasard un client de l'agence parmi ceux qui ont été interrogés ; on admet que tous les clients interrogés ont la même probabilité d'être choisis.
On note :

- G l'évènement : «le client choisi part en groupe »,
- $\overline{G}$ l'évènement contraire de G : «le client choisi part seul»,
- E l'évènement: «le client choisi part à l'étranger»,
- $\overline{E}$ l'évènement contraire de E : «le client choisi part en France».

Tableau des effectifs

	G : Groupe	$\overline{G}$: Seuls	Total
E : Étranger			
$\overline{E}$: France			
Total			

Arbre de probabilité

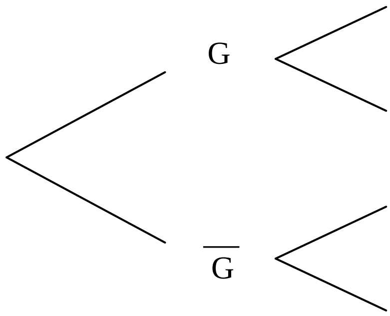


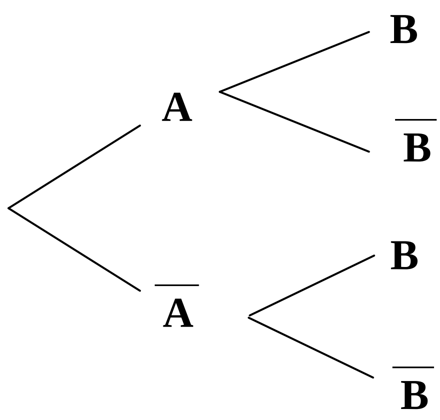
Tableau des probabilités

	G	$\overline{G}$	Total
E			
$\overline{E}$			
Total			

Tableau de probabilité

	B	$\overline{B}$	Total
A			
$\overline{A}$			
Total			

Arbre de probabilité



Pb.1 Compléter un tableau ou un arbre et lire les probabilités

Probabilités **contraires :** $\boldsymbol{p(A)+p(\bar{A})=1}$ ou $\boldsymbol{p(\bar{A})=1-p(A)}$

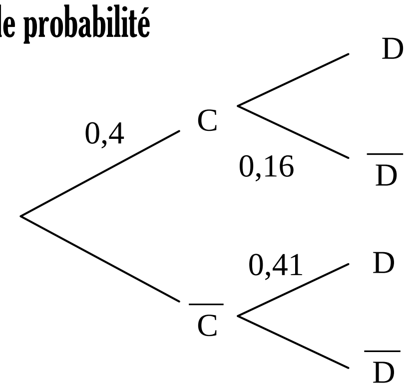
Et aussi $\boldsymbol{p_A(B)+p_A(\bar{B})=1}$ ou $\boldsymbol{p_A(\bar{B})=1-p_A(B)}$

Probabilités **totales :** $\boldsymbol{p(B)=p(A\cap B)+p(\bar{A}\cap B)}$ ou $\boldsymbol{p(\bar{A}\cap B)=\ p(B)-p(A\cap B)}$

1. Tableau de probabilités

	B	$\overline{\text{B}}$	Total
A		0,43	
$\overline{\text{A}}$	0,4		0,45
Total			

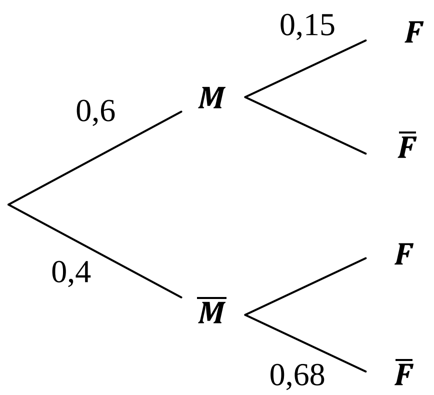
Arbre de probabilité



2. Tableau de probabilités

	$\boldsymbol{F}$	$\boldsymbol{\bar{F}}$	Total
$\boldsymbol{M}$	0,09		0,6
$\boldsymbol{\bar{M}}$	0,128	0,272	0,4
Total		0,782	1

Arbre de probabilité



$p(M\cap F)=$ $p(M\cap\bar{F})=$

$p_M(F)=$ $p_{\bar{M}}(F)=$

$p(\bar{M})=$ $p(F)=$

$p_F(M)=$ $p(M\cup F)=$

Pb.1 Traduction probabilité/français

Exemple 2

Afin de tester l'efficacité d'un médicament contre le cholestérol, des patients nécessitant d'être traités ont accepté de participer à un essai clinique organisé par un laboratoire.

Dans cet essai, 60 % des patients ont pris le médicament pendant un mois, les autres ayant pris un placebo (comprimé neutre).

On étudie la baisse du taux de cholestérol après l'expérimentation.

- On constate une baisse de ce taux chez 80 % des patients ayant pris le médicament.
- On ne constate aucune baisse pour 90 % des personnes ayant pris le placebo.

On choisit au hasard un patient ayant participé à l'expérimentation et on note :

- M l'évènement « le patient a pris le médicament » ;
- B l'évènement « le taux de cholestérol a baissé chez le patient ».

Traduction dans le contexte	Notation
Quelle est la probabilité que le taux du patient n'ait pas baissé, alors qu'il a pris le médicament ?	
Quelle est la probabilité que le patient ait pris le médicament et que son taux ait baissé ?	
Quelle est la probabilité qu'un patient ait pris le médicament parmi ceux dont le taux a baissé ?	
Quelle est la probabilité que le patient ait pris le placébo et que son taux ait baissé ?	
Quelle est la probabilité que le patient ait pris le médicament ou que son taux ait baissé ?	
Un patient a pris le médicament, quelle est la probabilité que son taux ait baissé ?	
Quelle est la probabilité qu'un patient ait pris le médicament alors que son taux n'a pas baissé ?	
Quelle est la probabilité que le patient n'ait pas pris le médicament et que son taux n'ait baissé ?	
Un patient a son taux qui a baissé. Quelle est la probabilité qu'il ait pris le placébo ?	
Sachant que le patient a pris le placébo, quelle est la probabilité que son taux ait baissé ?	
Quelle est la probabilité que le patient n'ait pas pris le médicament ou que son taux n'ait pas baissé ?	
Quelle est la probabilité que le patient ait pris le médicament et que son taux n'ait pas baissé ?	
On choisit un patient parmi ceux qui ont pris le placébo. Quelle est la probabilité que son taux ait baissé ?	
Sachant que son taux de cholestérol a baissé, quelle est la probabilité que le patient ait pris le médicament ?	

Pb.1 Calculer d'autres probabilités à partir d'un tableau ou d'un arbre

Probabilités **conditionnelles :** $\boldsymbol{p_A(B) = \dfrac{p(A \cap B)}{p(A)}}$

Probabilités **d'intersection :** $\boldsymbol{p(A \cap B) = p(A) \times p_A(B)}$

Probabilités **totales :** $\boldsymbol{p(B) = p(A \cap B) + p(\overline{A} \cap B)}$ ou $\boldsymbol{p(B) = p(A) \times p_A(B) + p(\overline{A}) \times p_{\overline{A}}(B)}$

Tableau de probabilités

	B	$\overline{\text{B}}$	Total
A	0,2	0,6	0,8
$\overline{\text{A}}$	0,05	0,15	0,2
Total	0,25	0,75	1

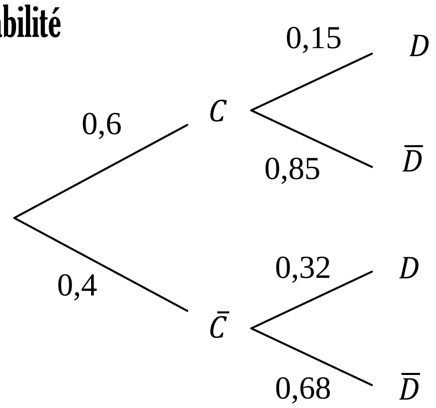
$p_A(B) =$

$p_{\bar{A}}(B) =$

$p_A(\bar{B}) =$

Ou $p_A(\bar{B}) =$

Arbre de probabilité



$p(C \cap D) =$

$p(\bar{C} \cap D) =$

$p(D) =$

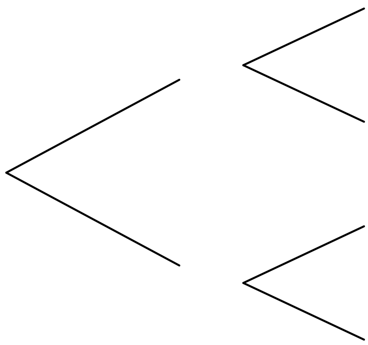
$p(\bar{D}) =$

Pb.1 Inverser la condition

Exemple (Polynésie 2014) :

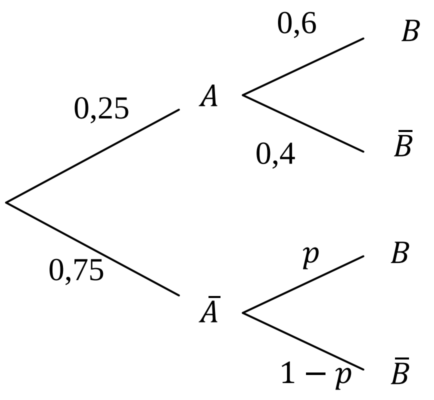
Zoé se rend à son travail à pied ou en voiture.
Là où elle habite, il pleut un jour sur quatre.
Lorsqu'il pleut, Zoé se rend en voiture à son travail dans 80% des cas. Lorsqu'il ne pleut pas, elle se rend à pied à son travail avec une probabilité égale à 0,6.

Zoé arrive à pied au travail aujourd'hui. Quelle est la probabilité qu'il pleuve ?



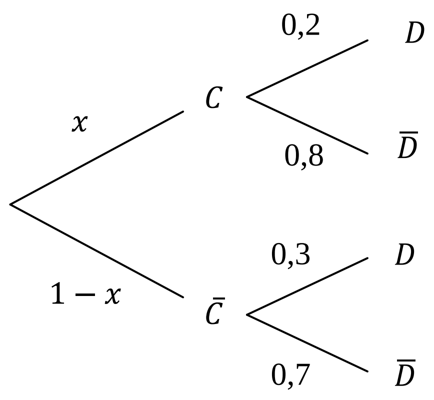
Pb.1 Probabilités avec inconnues - équations

Cas 1 : On sait que $p(B) = 0{,}45$



Déterminer p

Cas 2 : On sait que $p(D) = 0{,}26$



Déterminer x

Pb.1 Type bac - Exemple

Un laboratoire pharmaceutique propose des tests de dépistage de diverses maladies. Son service de communication met en avant les caractéristiques suivantes :

- la probabilité qu'une personne malade présente un test positif est 0,99
- la probabilité qu'une personne saine présente un test positif est 0,001

Partie A

1. Pour une maladie qui vient d'apparaître, le laboratoire élabore un nouveau test.
Une étude statistique permet d'estimer que le pourcentage de personnes malades parmi la population d'une métropole est égal à 0,1 %.
On choisit au hasard une personne dans cette population et on lui fait subir le test.
On note M l'évènement « la personne choisie est malade » et T l'évènement « le test est positif ».

a. Traduire l'énoncé sous la forme d'un arbre pondéré.

b. Démontrer que la probabilité $p(T)$ de l'évènement T est égale à $1{,}989 \times 10^{-3}$.

c. L'affirmation suivante est-elle vraie ou fausse? Justifier la réponse.
Affirmation : « Si le test est positif, il y a moins d'une chance sur deux que la personne soit malade ».

2. Le laboratoire décide de commercialiser un test dès lors que la probabilité qu'une personne testée positivement soit malade est supérieure ou égale à 0,95. On désigne par x la proportion de personnes atteintes d'une certaine maladie dans la population.
À partir de quelle valeur de x le laboratoire commercialise-t-il le test correspondant ?

Formulaire de probabilités

Probabilités **contraires**	$p(A) + p(\overline{A}) = 1$ ou $p(\overline{A}) = 1 - p(A)$ Et aussi $p_A(B) + p_A(\overline{B}) = 1$ ou $p_A(\overline{B}) = 1 - p_A(B)$
Probabilités **conditionnelles**	$p_A(B) = \dfrac{p(A \cap B)}{p(A)}$
Probabilités **d'intersection**	$p(A \cap B) = p(A) \times p_A(B)$ ou $p(A \cap B) = p(B) \times p_B(A)$
Probabilités **totales**	$p(B) = p(A \cap B) + p(\overline{A} \cap B)$ ou $p(B) = p(A) \times p_A(B) + p(\overline{A}) \times p_{\overline{A}}(B)$ Mais aussi : $p(\overline{A} \cap B) = p(B) - p(A \cap B)$ **Généralisation** : Si $A_1, A_2 \dots A_n$ forment une partition de l'univers , on a : $p(B) = p(A_1 \cap B) + p(A_2 \cap B) + \cdots + p(A_n \cap B)$
Évènements **indépendants**	$p_A(B) = p_{\overline{A}}(B) = p(B)$ ou $p_B(A) = p_{\overline{B}}(A) = p(A)$ Mais aussi : $p(A \cap B) = p(A) \times p(B)$ A et B indépendants $\Rightarrow$ $\overline{A}$ et B indépendants et A et $\overline{B}$ indépendants

ROC : Probabilité et évènements indépendants

A et B sont deux évènements sur un univers .
Si les événements A et B sont indépendants, **alors** il en est de même pour $\bar{A}$ et B

Démonstration :

A et B indépendants $\Leftrightarrow$ $p(A \cap B) = p(A) \times p(B)$

Or $p(\bar{A} \cap B) + p(A \cap B) = p(B)$ formule des probabilités totales

Donc $p(\bar{A} \cap B) = p(B) - p(A \cap B) = p(B) - p(A) \times p(B)$ puisque A et B indépendants

Et $p(\bar{A} \cap B) = \big(1 - p(A)\big) \times p(B)$ $\Leftrightarrow$ $p(\bar{A} \cap B) = p(\bar{A}) \times p(B)$ $\Leftrightarrow$ $\bar{A}$ et B indépendants