Corrections Savoir Vp.5

Corrigé Exercice 17

1) a) On a $\overrightarrow{AC}\begin{pmatrix}3\\-2\\6\end{pmatrix}$ donc $AC=\sqrt{9+4+36}=7$.

b) $l=\frac{|3(2)-2(1)-(-1)-6|}{\sqrt{3^2+(-2)^2+(-1)^2}}=\frac{|-1|}{\sqrt{14}}=\frac{1}{\sqrt{14}}$.

Pas la peine de faire deux fois le même calcul du dénominateur : $l'=\frac{|3(5)-2(-1)-(11)-6|}{\sqrt{14}}=0$.

On en conclut que $C\in\mathcal{P}$.

2) a) On a $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}-3\\2\\3\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{BC}\begin{pmatrix}-1\\-3\\1\end{pmatrix}$ d'où $\vec{n}.\overrightarrow{AB}=-3+0+3=0$ et $\vec{n}.\overrightarrow{BC}=-1+0+1=0$.

$\vec{n}$ est donc orthogonal aux vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{BC}$ et c'est donc un vecteur normal de (ABC).

b) L'équation de (ABC) est donc donnée par : $8x+y+11z-8(2)-1-11(-1)=0$

$\Leftrightarrow 8x+y+11z-6=0$.

$\Rightarrow h=\ d\big(D,(ABC)\big)=\frac{|8(-1)+(-3)+11(-1)-6|}{\sqrt{8^2+1^2+11^2}}=\frac{28}{\sqrt{186}}\simeq 2{,}05$.

c) On a $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{BC}=3-6+3=0$ donc $(AB)\perp(BC)$. ABC est donc rectangle en B.

Son aire est donc donnée par : $a=\frac{AB\times BC}{2}$

Or $AB=\sqrt{9+4+3}=4$ et $BC=\sqrt{1+9+1}=\sqrt{11}$ donc $a=2\sqrt{11}$.

d) Le tétraèdre $ABCD$ est une pyramide à base triangulaire ABC de hauteur h.

Son volume est donc donné par : $V=\frac{1}{3}a\times h=\frac{1}{3}\times\frac{28}{\sqrt{186}}\times 2\sqrt{11}\simeq 4{,}54$

3) a) On a : $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}-2\\1\\1\end{pmatrix}$ donc $(AB):\begin{cases}x=2-2t\\y=t\\z=t\end{cases}\quad t\in\mathbb{R}$

Soit H le projeté orthogonal de O sur (AB). Il existe alors un nombre $t\in\mathbb{R}$ tel que : $\begin{cases}x_H=2-2t\\y_H=t\\z_H=t\end{cases}$

D'autre part, le plan $\mathcal{P}$ normal à $\overrightarrow{AB}$ et passant par A a pour équation :

$-2x+y+z-(0+0+0)=0\Leftrightarrow -2x+y+z=0$

On a donc : $-2(2-2t)+t+t=0\Rightarrow 6t-4=0\Rightarrow t=\frac{2}{3}$.

Ainsi : $H\left(2-\frac{4}{3};\frac{2}{3};\frac{2}{3}\right)=\left(\frac{2}{3};\frac{2}{3};\frac{2}{3}\right)$ et donc $d\big(O,(AB)\big)=OH=\sqrt{3\times\left(\frac{2}{3}\right)^2}=\frac{2}{\sqrt{3}}$.

b) On a $AB=\sqrt{4+1+1}=\sqrt{6}$.

L'aire du triangle AOB est donc $\frac{1}{2}AB\times OH=\frac{1}{2}\times\sqrt{6}\times\frac{2}{\sqrt{3}}=\sqrt{2}$.

4) a) On a $I\left(1;0;\frac{1}{2}\right)$; $A(0;0;0)$ et $G(1;1;1)$. On a donc $\overrightarrow{AG}\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$ et $(AG):\begin{cases}x=t\\y=t\\z=t\end{cases},\ t\in\mathbb{R}$.

Soit M le projeté orthogonal de F sur (AG). Il existe alors un nombre $t\in\mathbb{R}$ tel que : $\begin{cases}x_M=t\\y_M=t\\z_M=t\end{cases}$

D'autre part, le plan $\mathcal{P}$ normal à $\overrightarrow{AG}$ et passant par I a pour équation :

$x + y + z - \left(1 + 0 + \frac{1}{2}\right) = 0 \Leftrightarrow x + y + z - \frac{3}{2} = 0$

On a donc : $t + t + t - \frac{3}{2} = 0 \Rightarrow t = \frac{1}{2}$.

Ainsi : $M\left(\frac{1}{2};\frac{1}{2};\frac{1}{2}\right)$ et donc $d\big(I,(AG)\big) = IM = \sqrt{3 \times \left(\frac{1}{2}\right)^2} = \frac{\sqrt{3}}{2}$.

b) On a $AG = \sqrt{3}$ donc :

L'aire du triangle IAG est : $\frac{1}{2} \times IM \times AG = \frac{3}{4}$.