CORRECTIONS

Corrigé Sujet n°1

Corrigé Exercice 1

1. O est le centre du carré dont les diagonales sont de même longueur et perpendiculaires : donc $OB = OC = 1$ et $\overrightarrow{OB}$ et $\overrightarrow{OC}$ sont orthogonaux.
Comme la pyramide est régulière, alors O est le projeté orthogonal de S sur le plan (ABCD). Donc $\overrightarrow{OB}$ et $\overrightarrow{OS}$ sont orthogonaux.
De plus, toutes les arêtes ont la même longueur, donc $AB = SB$ or, comme le triangle OAB est rectangle, on a $AB^2 = OB^2 + OA^2 = 1 + 1 = 2$ donc $AB = \sqrt{2}$
Dans le triangle SOB, rectangle en O, on a $OS^2 = SB^2 - OB^2 = \left(\sqrt{2}\right)^2 - 1 = 2 - 1 = 1$
On a $OA = OB = OS = 1$
Le repère $(O\,;\,\overrightarrow{OB}\,;\,\overrightarrow{OC}\,;\,\overrightarrow{OS})$ est bien un repère orthonormé.

2. a. $\overrightarrow{OK} = \overrightarrow{OS} + \overrightarrow{SK} = \overrightarrow{OS} + \frac{1}{3}\overrightarrow{SD} = \overrightarrow{OS} + \frac{1}{3}\left(\overrightarrow{SO} + \overrightarrow{OD}\right) = \overrightarrow{OS} - \frac{1}{3}\overrightarrow{OS} - \frac{1}{3}\overrightarrow{OB} = -\frac{1}{3}\overrightarrow{OB} + \frac{2}{3}\overrightarrow{OS}$
Donc le point K a pour coordonnées : $\boldsymbol{K\left(-\frac{1}{3};0;\frac{2}{3}\right)}$

b. On a $\overrightarrow{BI} = \begin{pmatrix} 0-1 \\ 0-0 \\ \frac{1}{2}-0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{BK} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{3}-1 \\ 0-0 \\ \frac{2}{3}-0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{4}{3} \\ 0 \\ \frac{2}{3} \end{pmatrix}$ avec $\frac{4}{3} \times \frac{1}{2} = \frac{2}{3}$
On a $\boldsymbol{\overrightarrow{BK} = \frac{4}{3}\overrightarrow{BI}}$ les vecteurs sont colinéaires, donc **les points B, I et K sont alignés.**

c. Le point K appartient au plan (BCI) puisque $K \in (BI)$ d'après la question précédente.
Le point K appartient aussi par définition au plan (SAD) : il appartient donc à l'intersection des plans (BCI) et (SAD). Il en est de même pour le point L.
Donc l'intersection des plans (BCI) et (SAD) est la droite (KL).
Or les droites (AD) et (BC) sont parallèles, donc, d'après le théorème du toit, l'intersection (KL) leur est parallèle : on a bien **(AD) et (KL) parallèles**

d. Les droites (AD) et (LK) étant parallèles, on a, d'après la réciproque du théorème de Thalès : $\overrightarrow{SL} = \frac{1}{3}\overrightarrow{SA}$
Et donc $\overrightarrow{OL} = \overrightarrow{OS} + \overrightarrow{SJ} = \overrightarrow{OS} + \frac{1}{3}\overrightarrow{SA} = \overrightarrow{OS} + \frac{1}{3}\left(\overrightarrow{SO} + \overrightarrow{OA}\right) = \overrightarrow{OS} - \frac{1}{3}\overrightarrow{OS} - \frac{1}{3}\overrightarrow{OC} = -\frac{1}{3}\overrightarrow{OC} + \frac{2}{3}\overrightarrow{OS}$
Donc le point K a pour coordonnées : $\boldsymbol{L\left(0;-\frac{1}{3};\frac{2}{3}\right)}$

3. a. On a $\overrightarrow{BC} = \begin{pmatrix} 0-1 \\ 1-0 \\ 0-0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{BI} = \begin{pmatrix} 0-1 \\ 0-0 \\ \frac{1}{2}-0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix}$

$\vec{n}.\overrightarrow{BC} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}.\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = -1+1+0 = 0$ donc les vecteurs $\vec{n}$ et $\overrightarrow{BC}$ sont orthogonaux.

$\vec{n}.\overrightarrow{BI} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}.\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix} = -1+0+2\times\frac{1}{2} = 0$ donc les vecteurs $\vec{n}$ et $\overrightarrow{BI}$ sont orthogonaux.

Le vecteur $\vec{n}$ est orthogonal à deux vecteurs non colinéaires du plan (BCI), **il est donc normal au plan (BCI)**

b. On a $S(0;0;1)$; $A(0;-1;0)$ et $D(-1;0;0)$ donc $\overrightarrow{AS} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{DS} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

On remarque que $\vec{n} = \overrightarrow{AS} + \overrightarrow{DS}$ **les 3 vecteurs sont donc coplanaires.**

c. $\vec{n}$ est normal au plan (BCI) et coplanaire avec deux vecteurs non colinéaires de (SAD) : **les plans (BCI) et (SAD) sont donc orthogonaux**

Corrigé Exercice 2

Partie A

1. « B3 = 2*B2 – A2 + 3 » et **« C3 = C2*2 »** ou **« C3 = 2^A3 »**

(Attention, en vrai, sur un tableur, pour faire apparaître le « ^ », il faut mettre un espace après puis cliquer sur la case)

2. On calcul les rapports :

n	un	vn	un/vn
10	3 080	1024	3,0078125
11	6 153	2048	3,004394531
12	12 298	4096	3,002441406
13	24 587	8192	3,001342773

Il semble que la suite (u_n) tende vers $+\infty$ mais que la suite $\left(\frac{u_n}{v_n}\right)$ tende vers une limite finie qui serait 3.

Partie B

1. Raisonnement par récurrence

Initialisation : Pour $n = 0$, on a d'une part $3\times 2^0 + 0 - 2 = 3\times 1 - 2 = 1$ et d'autre part $u_0 = 1$

Donc $\boldsymbol{u_n = 3\times 2^n + n - 2}$ est vraie au rang 0

Hérédité : **Si $u_n = 3\times 2^n + n - 2$ est vraie pour $n = p$,** alors on a $\boldsymbol{u_p = 3\times 2^p + p - 2}$

$u_{p+1} = 2u_p - p + 3 = 2(3\times 2^p + p - 2) - p + 3 = 3\times 2^{p+1} + 2p - 4 - p + 3$

$u_{p+1} = 3\times 2^{p+1} + p - 1 = 3\times 2^{p+1} + (p+1) - 2$

Donc $u_n = 3\times 2^n + n - 2$ est vraie pour $n = p+1$

Conclusion **: Pour tout nombre entier n, on a bien $u_n = 3\times 2^n + n - 2$**

2. On a : $\lim\limits_{n\to\infty} 2^n = +\infty$ et donc $\lim\limits_{n\to\infty}(3\times 2^n) = +\infty$ et $\lim\limits_{n\to\infty}(n-2) = +\infty$

donc par somme, on a $\boldsymbol{\lim_{n\to\infty} u_n = +\infty}$

3. La suite est **croissante**, en effet, on a pour tout entier n :

$$\begin{aligned} u_{n+1} - u_n &= 3 \times 2^{n+1} + (n+1) - 2 - (3 \times 2^n + n - 2) \\ &= 3 \times (2^{n+1} - 2^n) + 1 = 3 \times 2^n(2-1) + 1 \\ &= 3 \times 2^n + 1 \quad \textbf{Et donc } \boldsymbol{u_{n+1} - u_n > 0} \end{aligned}$$

À la calculatrice, on trouve $u_{18} = 786\,448$ et $u_{19} = 1\,572\,881$, **c'est donc à partir du terme u_{19} que la suite dépasse un million.**

Partie C

1. $$\frac{u_{n+1}}{v_{n+1}} - \frac{u_n}{v_n} = \frac{3\times2^{n+1}+n+1-2}{2^{n+1}} - \frac{3\times2^n+n-2}{2^n} = \frac{3\times2^{n+1}+n+1-2-2(3\times2^n+n-2)}{2^{n+1}}$$
$$= \frac{3\times2^{n+1}+n+1-2-3\times2^{n+1}-2n+4}{2^{n+1}} = \frac{-n+3}{2^{n+1}}$$

Donc, pour $n > 3$, on a $-n+3 < 0$ et par conséquent, comme $2^n > 0$ pour tout entier n, on a bien :
$\frac{u_{n+1}}{v_{n+1}} - \frac{u_n}{v_n} < 0$ **La suite $\left(\frac{u_n}{v_n}\right)$ est décroissante à partir du rang 3**

2. $\frac{u_n}{v_n} = \frac{3\times2^n+n-2}{2^n} = 3 + \frac{n}{2^n} - \frac{2}{2^n}$ On sait que $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{1}{2^n}\right) = 0$

D'après l'encadrement $0 < \frac{n}{2^n} \leq \frac{1}{n}$, et comme $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n}\right) = 0$, on a, en appliquant le théorème des gendarmes : $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\frac{n}{2^n}\right) = 0$

Donc, par somme et produit par un réel, on a : $\boldsymbol{\lim_{n\to\infty} u_n = 3 + 0 + 0 = 3}$

Corrigé Exercice 3

Partie I

1. $\lim\limits_{x\to-\infty} -2x = +\infty$ et $\lim\limits_{y\to+\infty} e^y = +\infty$ donc par composée de limites : $\lim\limits_{x\to-\infty} e^{-2x} = +\infty$

On a alors, par somme de limite $\boldsymbol{\lim\limits_{x\to-\infty} x - e^{-2x} = -\infty}$

$\lim\limits_{x\to+\infty} -2x = -\infty$ et $\lim\limits_{y\to-\infty} e^y = 0$ donc par composée de limites : $\lim\limits_{x\to+\infty} e^{-2x} = 0$

On a alors, par somme de limite $\boldsymbol{\lim\limits_{x\to+\infty} x - e^{-2x} = +\infty}$

2. $f'(x) = 1 + 2e^{-2x}$ donc $f'(x) > 0$ car c'est une somme de deux termes strictement positifs

On a :

x	$-\infty$		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	$+\infty$

3. f est continue et strictement croissante sur $\mathbb{R}$, à valeurs dans $]-\infty; +\infty[$. Donc, d'après le théorème des valeurs intermédiaires, l'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution α sur $\mathbb{R}$.

On a $\alpha \simeq 0{,}43$

4.

x	$-\infty$		α		$+\infty$
$f(x)$		$-$	0	$+$	

Partie II

1. a. $h'(t) = \dfrac{2t - 2e^{-2t}}{2\sqrt{t^2 + e^{-2t}}} = \dfrac{2(t - e^{-2t})}{2\sqrt{t^2 + e^{-2t}}} = \dfrac{t - e^{-2t}}{\sqrt{t^2 + e^{-2t}}} = \dfrac{f(t)}{\sqrt{t^2 + e^{-2t}}}$

b. Si on étudie les variations de h :

t	$-\infty$	α	$+\infty$
$f(t)$	$-$	0	$+$
$\sqrt{t^2 + e^{-2t}}$	$+$	$\vert$	$-$
$h'(t)$	$-$	0	$+$
$h(t)$	$\searrow$	$\boldsymbol{h(\alpha)}$	$\nearrow$

Donc h a son minimum en $t = \alpha$ d'une valeur de $h(\alpha) = \sqrt{\alpha^2 + e^{-2\alpha}}$

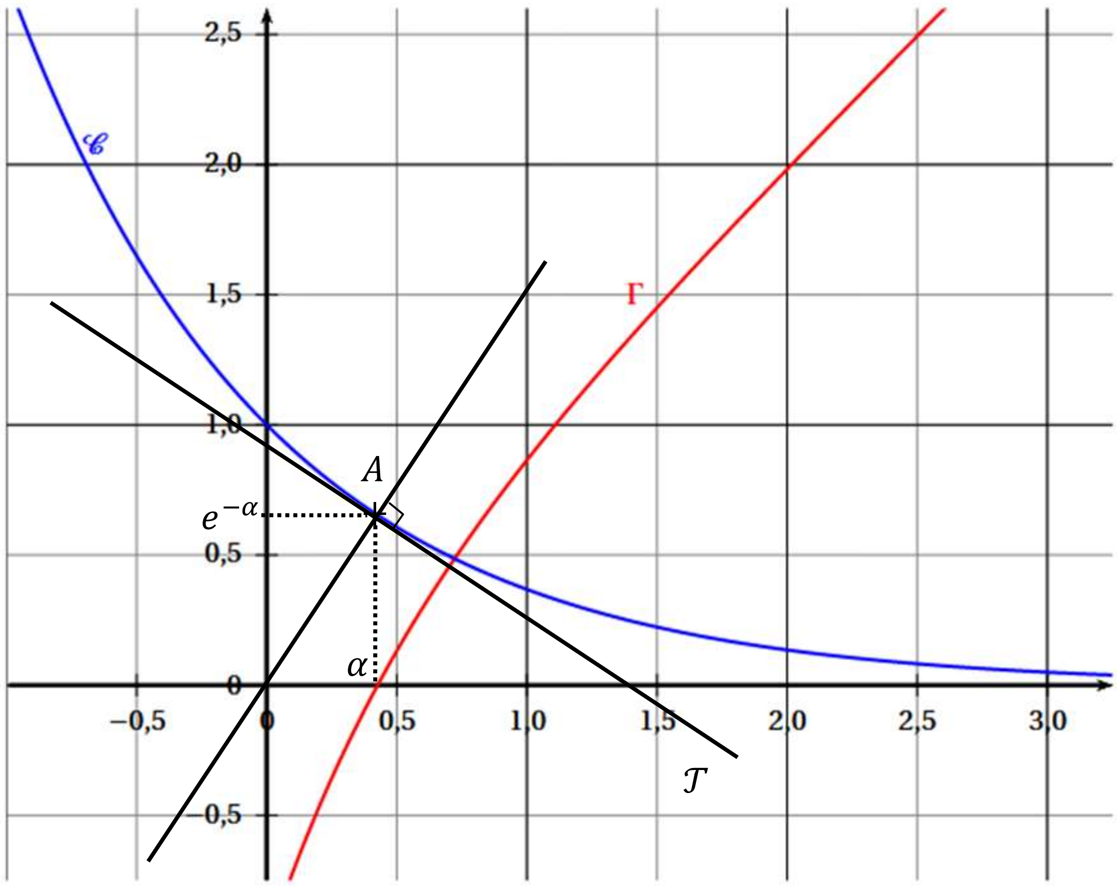
Or, la point de $\mathcal{C}$ d'abscisse α a pour ordonnée $g(\alpha) = e^{-\alpha}$
Le point A de coordonnées $(\alpha\ ;\ e^{-\alpha})$ est bien le point de la courbe $\mathcal{C}$ pour lequel la longueur OM est minimale.

Graphiquement, α est l'abscisse de l'intersection de Γ avec l'axe des abscisses, puisque on l'a définie par $f(\alpha) = 0$

2. a. On a $g(x) = -e^{-x}$. Donc le coefficient directeur de la tangente $\mathcal{T}$ est $\boldsymbol{g'(\alpha) = -e^{-\alpha}}$

b. On a le produit des coefficients directeurs : $mm' = -e^{-\alpha} \times \dfrac{e^{-\alpha}}{\alpha} = \dfrac{-e^{-2\alpha}}{\alpha}$
Mais on sait que $f(\alpha) = 0 \iff \alpha - e^{-2\alpha} = 0 \iff \alpha = e^{-2\alpha}$
donc $mm' = \dfrac{-\alpha}{\alpha} = -1$ Les droites (OA) et $\mathcal{T}$ sont bien perpendiculaires.

Annexe



Corrigé Exercice 4

Partie A

1. L'énoncé donne : $p(R) = 0{,}4$; $p_R(J) = 0{,}25$ et appelle $x = p_{\bar{R}}(J)$.
On a alors $p_{\bar{R}}(\bar{J}) = 1 - x$
Voir l'arbre ci-contre.

2. L'énoncé donne de plus $p(J) = 0{,}2$.
Or $p(J) = p(R \cap J) + p(\bar{R} \cap J) = p(R)p_R(J) + p(\bar{R})p_{\bar{R}}(J)$
$= 0{,}4 \times 0{,}25 + 0{,}6x$.
On doit donc avoir : $0{,}1 + 0{,}6x = 0{,}2 \iff \boldsymbol{x = \frac{1}{6}}$

3. On demande ici : $p_J(R) = \frac{p(R\cap J)}{p(J)} = \frac{0{,}1}{0{,}2} = \frac{1}{2}$.
Sachant que la bouteille passée en caisse et prélevée au hasard est une bouteille de «pur jus » , **il y a donc une chance sur deux que ce soit une bouteille de jus d'orange.**

Partie B

1. Étant donné que le choix des 500 bouteilles peut être assimilé à un tirage au sort avec remise, avec à chaque tirage la même probabilité $p(J) = 0{,}2$ d'obtenir une bouteille de « pur jus », X suit donc **une loi binomiale de paramètres $\boldsymbol{n = 500}$ et $\boldsymbol{p = 0{,}2}$.**

2. « Au moins 75 », c'est « 75 ou plus ». On cherche donc $p(X \geq 75)$.
Or $p(X \leq 74) + p(X \geq 75) = 1$ donc $p(X \geq 75) = 1 - p(X \leq 74)$.
A la calculatrice, on trouve alors $p(X \geq 75) \simeq 0{,}998$.
Il y a donc 99,8% de chances qu'au moins 75 bouteilles du lot soient de « pur jus ».