SUJET D’ENTRAÎNEMENT AU BAC
(avec fiches de cours)

SESSION décembre 2021

MATHEMATIQUES

SPECIALITE MATHEMATIQUES

Durée de l’épreuve : 2 heures

Ce sujet comporte 6 **pages**.

LA PAGE 6 EST UNE ANNEXE A RENDRE AVEC LA COPIE

L’utilisation d’une calculatrice ainsi que l’utilisation de fiches de cours sont autorisées.
Ce n’est pas le cas du téléphone portable ; aucun échange de calculatrice n’est permis entre les candidats, ni d’aucun document, d’aucun formulaire, d’aucune fiche de cours.

Le sujet est composé de 4 exercices indépendants.

Dans chaque exercice, le candidat peut admettre un résultat précédemment donné dans le texte pour aborder les questions suivantes, à condition de l’indiquer clairement sur la copie.

Le candidat est invité à faire figurer sur la copie toute trace de recherche, même incomplète ou non fructueuse, qu’il aura développée. Il est rappelé que la qualité de la rédaction et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l’appréciation des copies.

EXERCICE 1 (5 points)

Une association confectionne et porte, chaque jour, à domicile, des repas à des personnes dépendantes.

En 2015, 600 personnes étaient abonnées à ce service.

Pour étudier son développement, cette association a fait une enquête selon laquelle l'évolution peut être modélisée de la façon suivante :

- Chaque année, 5 % des abonnements ne sont pas renouvelés.
- Chaque année, on compte 80 nouveaux abonnements à ce service.

1. Cette évolution peut s'étudier à l'aide d'une suite (u_n) où u_n est le nombre d'abonnés pendant l'année $2015 + n$.
On a ainsi, pour tout entier naturel n : $u_{n+1} = 0{,}95\, u_n + 80$ et $u_0 = 600$.

a. Donner u_1 et u_2 (arrondir les valeurs à l'unité).
Interpréter ces résultats dans le contexte de l'énoncé.

b. On introduit la suite (v_n) définie pour tout entier naturel n par : $v_n = u_n - 1\,600$.
Montrer que (v_n) est une suite géométrique. Préciser la raison et le premier terme de cette suite.

c. En déduire que l'on a, pour tout entier naturel n : $u_n = 1600 - 1000 \times 0{,}95^n$.

2. La taille des locaux ne permet pas de servir plus de 1 000 repas.
Si cette évolution se poursuit au même rythme, l'association devra-t-elle envisager un jour des travaux d'agrandissement ?

3. Déterminer la limite de la suite (u_n).
Interpréter ce résultat dans le contexte de l'énoncé.

EXERCICE 2 (4 points)

Cet exercice est un questionnaire à choix multiples. Pour chacune des questions suivantes, une seule des quatre réponses proposées est exacte. Une réponse exacte rapporte un point. Une réponse fausse, une réponse multiple ou l'absence de réponse à une question ne rapporte ni n'enlève de point.
Pour répondre, indiquer sur la copie le numéro de la question et la lettre de la réponse choisie.
Aucune justification n'est demandée.

Question 1.
On considère la fonction g définie par : $g(x) = (x-1)\ln(x-1)$.
L'équation de la tangente à la courbe de g en $x = e + 1$ est :

a. $y = 2x + 3e + 2$ **b.** $y = ex - e^2 - e + 2$ **c.** $y = 2x - e - 2$ **d.** $y = 2x - e + 2$

Question 2.
On considère la suite (u_n) définie par : $u_n = \dfrac{n-2n^3}{n-1}$. La limite de cette suite est :

a. $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = +\infty$ **b.** $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = -\infty$ **c.** $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = -2$ **d.** $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = 0$

Question 3.
On se place dans un repère $(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k})$.
On considère les points $A(2;3;-1)$, $B(-1;0;2)$, $C(0;3;-3)$ et $D(2;-1;1)$.
Ces quatre points sont :

a. alignés **b.** coplanaires **c.** confondus **d.** non coplanaires

Question 4.
L'ensemble des solutions de l'inéquation $x^2 < 2x + 3$ est :

a. $S =]-1; 3[$ **b.** $S =]1 - \sqrt{2}; 1 + \sqrt{2}[$

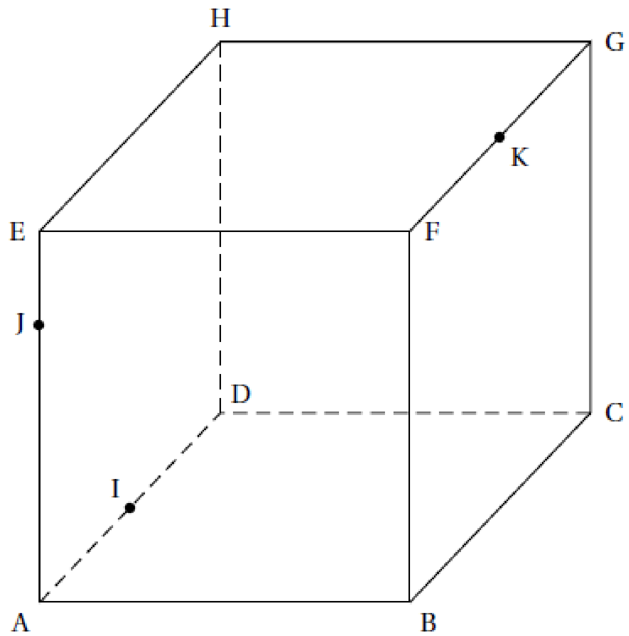
c. $S =]-\infty; -1[\cup]3; +\infty[$ **d.** $S =]-\infty; 1 - \sqrt{2}[\cup]1 + \sqrt{2}; +\infty[$

EXERCICE 3 (5 points)

La figure ci-contre représente un cube $ABCDEFGH$.
Elle est reproduite sur **la feuille en annexe, à rendre avec la copie.**
Toutes les constructions demandées doivent être faite sur cette annexe, à rendre avec la copie.

Les trois points I, J, K sont définis par les conditions suivantes :

- I est le milieu du segment $[AD]$;
- J est tel que $\overrightarrow{AJ} = \frac{3}{4}\overrightarrow{AE}$
- K est le milieu du segment $[FG]$.



PARTIE A

1. a. Quelle est l'intersection du plan (IJK) et du plan (EAD) ?

b. Quelle est la position relative des droites (IJ) et (EH) ?

2. Sur la figure donnée **en annexe (à rendre avec la copie),** construire sans justifier le point d'intersection P du plan (IJK) et de la droite (EH).
Placer ensuite M le point d'intersection des droites (PK) et (EF).
On laissera les traits de construction sur la figure.

3. En déduire le tracé de l'intersection entre les plans (IJK) et (EFB).

PARTIE B

On se place désormais dans le repère orthonormé $\left(A; \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}, \overrightarrow{AE}\right)$.

1. Donner sans justification les coordonnées des points I, J et K, et celles du vecteur $\overrightarrow{JK}$.

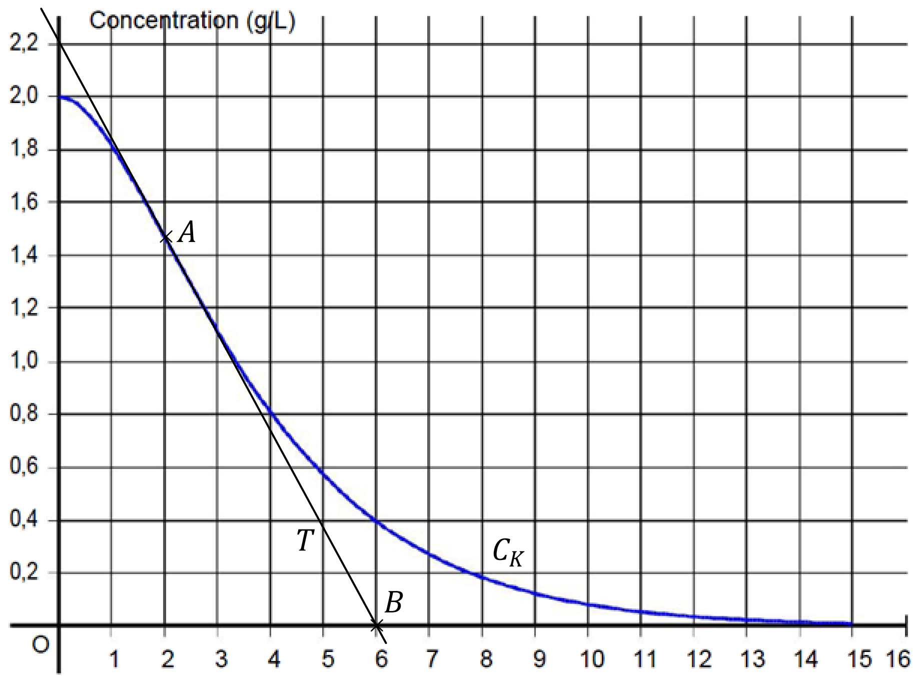
2. Donner la représentation paramétrique de la droite (JK).

3. Montrer que $IK = \sqrt{2}$ et que $IJ = \frac{\sqrt{13}}{4}$.

4. On admet que $JK = \frac{\sqrt{21}}{4}$.
Le triangle IJK est-il rectangle en J ? Justifier.

EXERCICE 4 (6 points)

On injecte à un patient un médicament et on mesure régulièrement, pendant 15 heures, la concentration, en grammes par litre, de ce médicament dans le sang.
On obtient la courbe C_K ci-dessous, courbe représentative d'une fonction K. Les abscisses x représentent le nombre d'heures écoulées depuis l'instant initial et $K(x)$ la concentration, en grammes par litre, du médicament dans le sang.



Sur ce graphique, T est la tangente à la courbe C_K en $x = 2$.
La droite T passe par les points A et B de coordonnées : $A\left(2; \frac{4}{e}\right)$ et $B(6; 0)$.

PARTIE A – Etude graphique

Avec la précision permise par le graphique, indiquer :

1. La concentration à l'instant initial.
2. L'intervalle de temps pendant lequel la concentration est supérieure ou égale à 0,4 gramme par litre.
3. La valeur de $K'(2)$, où K' désigne la fonction dérivée de la fonction K.

On fera apparaitre sur le graphique les traits de construction nécessaires.

PARTIE B – Etude théorique

On admet que la concentration peut être modélisée par la fonction K définie sur l'intervalle $[0; 15]$ par :

$$K(x) = (x+2)e^{-\frac{x}{2}}$$

1. Justifier que $K'(x) = -\frac{1}{2}x\, e^{-\frac{x}{2}}$ et en déduire le tableau de variation de la fonction K sur $[0; 15]$.
2. Justifier que l'équation $K(x) = 0{,}1$ admet une unique solution α sur l'intervalle $[0; 15]$.
3. Déterminer valeur approchée de α au dixième.
4. On estime que le médicament n'est plus actif lorsque la concentration est strictement inférieure à 0,1 gramme par litre. Pendant combien de temps le médicament est-il actif ?

PARTIE C – Généralisation - BONUS [Seulement si tout le reste a été tenté] (+1 point)

Pour tout entier $n > 0$, on définit sur l'intervalle $[0; n]$ la fonction K_n par :

$$K_n(x) = (x+n)e^{-\frac{x}{n}}$$

1. Exprimer $C_n(0)$ en fonction de n et montrer que $C_n(n) = \lambda\, n$ où $\lambda = \frac{2}{e}$.

2. Dresser le tableau de variation de K_n sur $[0; n]$.

3. A l'aide d'une valeur approchée de λ, montrer que l'on a $C_n(0) > 0{,}9n > C_n(n)$.
   En déduire qu'il existe une seule valeur α_n dans $[0; n]$ telle que $C_n(\alpha_n) = 0{,}9n$.

Annexe - Exercice 3 - question A.2