

Corrigé 8.

1. a. On a $\overrightarrow{AB} \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{AC} \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix}$ on calcule : $\frac{x_{\overrightarrow{AB}}}{x_{\overrightarrow{AC}}} = \frac{-3}{-1} = 3$ mais $\frac{y_{\overrightarrow{AB}}}{y_{\overrightarrow{AC}}} = \frac{1}{3} \neq 3$

Donc les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ ne sont pas colinéaires, les points A, B et C ne sont pas alignés.

b. Le plan (ABC) a pour vecteurs directeurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$

On a $\vec{n} \cdot \overrightarrow{AB} = -1 \times (-3) + 1 \times 1 + 4 \times (-1) = 3 + 1 - 4 = 0$ et $\vec{n} \cdot \overrightarrow{AC} = 1 + 3 - 4 = 0$

$\vec{n}$ est orthogonal à deux vecteurs directeurs du plan (ABC) , il est donc bien normal au plan

c. Le plan (ABC) a une équation cartésienne du type : $-x + y + 4z + d = 0$

Comme $A \in (ABC)$, on a $-x_A + y_A + 4z_A + d = 0 \Leftrightarrow -1 + 0 + 12 + d = 0 \Leftrightarrow d = -11$

(ABC) a bien pour équation cartésienne : $-x + y + 4z - 11 = 0$.

2. a. $\mathcal{P}$ a pour vecteur normal $\vec{m} \begin{pmatrix} 3 \\ -3 \\ 2 \end{pmatrix}$ et $\mathcal{P}'$ a pour vecteur normal $\vec{w} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}$

Les vecteurs $\vec{m}$ et $\vec{w}$ ne sont clairement pas colinéaires (on a $\frac{x_{\vec{m}}}{x_{\vec{w}}} = 3$ mais $\frac{z_{\vec{m}}}{z_{\vec{w}}} = 2 \neq \frac{x_{\vec{m}}}{x_{\vec{w}}}$) donc les plans ne sont pas parallèles : **ils sont sécants.**

b. $\vec{m} \cdot \vec{w} = \begin{pmatrix} 3 \\ -3 \\ 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix} = 3 + 3 - 2 = 4 \neq 0$

Les vecteurs normaux ne sont pas orthogonaux, donc les plans $\mathcal{P}$ et $\mathcal{P}'$ ne sont pas perpendiculaires

3. On a $\vec{m} \cdot \vec{u} = 3 - 3 + 0 = 0 \Rightarrow$ le vecteur $\vec{u}$ est orthogonal au vecteur normal $\vec{m}$, donc $\vec{u}$ est un vecteur directeur de $\mathcal{P}$

De même $\vec{w} \cdot \vec{u} = 1 - 1 + 0 = 0 \Rightarrow$ le vecteur $\vec{u}$ est orthogonal au vecteur normal $\vec{w}$, donc $\vec{u}$ est un vecteur directeur de $\mathcal{P}'$

Donc $\vec{u}$ est bien un vecteur directeur de la droite d'intersection de $\mathcal{P}$ et $\mathcal{P}'$.

4. On a $3x_M - 3y_M + 2z_M - 9 = 6 - 3 + 6 - 9 = 12 - 12 = 0$ donc $M \in \mathcal{P}$

De même $x_M - y_M - z_M + 2 = 2 - 1 - 3 + 2 = 4 - 4 = 0$ donc $M \in \mathcal{P}'$

Donc la droite (d) passe par le point M et a pour vecteur directeur $\vec{u}$

Une représentation paramétrique en est donc $\begin{cases} x = 2 + t \\ y = 1 + t \\ z = 3 \end{cases}, t \in \mathbb{R}$

5. On résout $\begin{cases} x = 2 + t \\ y = 1 + t \\ z = 3 \\ -x + y + 4z - 11 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2 + t \\ y = 1 + t \\ z = 3 \\ -2 - t + 1 + t + 12 - 11 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2 + t \\ y = 1 + t \\ z = 3 \\ 0 = 0 \end{cases}$

Le système a une infinité de solutions, donc la droite (d) est bien incluse dans le plan (ABC) .

Rem : On peut aussi réutiliser la même méthode, vérifier que $M \in (ABC)$ en remplaçant les coordonnées de M dans l'équation cartésienne, et vérifier que $\vec{u}$ est orthogonal à $\vec{n}$

On peut vérifier que (ABC) n'est confondus ni avec $\mathcal{P}$ ni avec $\mathcal{P}'$, car $\vec{n}$ n'est colinéaire ni avec $\vec{m}$ ni avec $\vec{w}$

Les trois plans (ABC) , $\mathcal{P}$ et $\mathcal{P}'$ sont donc sécants, d'intersection d

Corrigé 9.

1. On a les vecteurs $\overrightarrow{AB} \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 5 \end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{AC} \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix}$ on calcule : $\frac{x_{\overrightarrow{AB}}}{x_{\overrightarrow{AC}}} = \frac{-2}{-1} = 2$ mais $\frac{y_{\overrightarrow{AB}}}{y_{\overrightarrow{AC}}} = \frac{1}{-2} \neq 2$

Donc les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ ne sont pas colinéaires, les points A, B et C ne sont pas alignés : **ils forment bien un plan.**

2. $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 5 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix} = -2 \times (-1) + 1 \times (-2) + 5 \times 0 = 2 - 2 + 0 = 0$

Les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ sont orthogonaux, **le triangle ABC est bien rectangle en A .**

3. a. Le plan (ABC) a pour vecteurs directeurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$

On a $\vec{u} \cdot \overrightarrow{AB} = -4 - 1 + 5 = 0$ et $\vec{u} \cdot \overrightarrow{AC} = -2 + 2 + 0 = 0$

$\vec{u}$ est orthogonal à deux vecteurs directeurs du plan (ABC) , il est donc normal au plan et **la droite Δ , dirigée par $\vec{u}$ est bien orthogonale au plan (ABC)**

b. Le vecteur $\vec{u}$ est normal au plan (ABC) , donc son équation cartésienne est du type : $2x - y + z + k = 0$. Comme $A \in (ABC)$, on a $2x_A - y_A + z_A + k = 0 \Leftrightarrow 2 - 3 + 0 + k = 0 \Leftrightarrow k = 1$

Donc le plan (ABC) admet bien pour équation cartésienne : **$2x - y + z + 1 = 0$**

c. Δ passe par le point $D(-2 ; 2 ; 1)$ et son vecteur directeur est $\vec{u} \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$. Donc une représentation

paramétrique de Δ est : $\begin{cases} x = -2 + 2t \\ y = 2 - t \\ z = 1 + t \end{cases}, t \in \mathbb{R}$

4. La droite Δ est orthogonale au plan (ABC) et passe par D donc le projeté orthogonal de D sur (ABC) est le point d'intersection de Δ et de (ABC)

On résout le système d'équations : $\begin{cases} x = -2 + 2t \\ y = 2 - t \\ z = 1 + t \\ 2x - y + z + 1 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -2 + 2t \\ y = 2 - t \\ z = 1 + t \\ 2(-2 + 2t) - (2 - t) + 1 + t + 1 = 0 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} x = -2 + 2t \\ y = 2 - t \\ z = 1 + t \\ -4 + 4t - 2 + t + t + 2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -2 + 2t \\ y = 2 - t \\ z = 1 + t \\ 6t = 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -2 + 2 \times \frac{2}{3} \\ y = 2 - \frac{2}{3} \\ z = 1 + \frac{2}{3} \\ t = \frac{4}{6} = \frac{2}{3} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -\frac{6}{3} + \frac{4}{3} = -\frac{2}{3} \\ y = \frac{6}{3} - \frac{2}{3} = \frac{4}{3} \\ z = \frac{3}{3} + \frac{2}{3} = \frac{5}{3} \\ t = \frac{4}{6} = \frac{2}{3} \end{cases}$

On retrouve bien les coordonnées du point $H \left(-\frac{2}{3} ; \frac{4}{3} ; \frac{5}{3} \right)$ **qui est bien le projeté orthogonal de D sur (ABC)**

5. a. $DH = \sqrt{\left(-\frac{2}{3} + 2\right)^2 + \left(\frac{4}{3} - 2\right)^2 + \left(\frac{5}{3} - 1\right)^2} = \sqrt{\left(\frac{4}{3}\right)^2 + \left(-\frac{2}{3}\right)^2 + \left(\frac{2}{3}\right)^2} = \sqrt{\frac{16}{9} + \frac{4}{9} + \frac{4}{9}} = \frac{\sqrt{24}}{\sqrt{9}} = \frac{2\sqrt{6}}{3}$ CQFD

b. On a l'aire du triangle rectangle ABC qui est :

$\mathcal{A}_{ABC} = \frac{AB \times AC}{2} = \frac{1}{2} \times \sqrt{(-2)^2 + 1^2 + 5^2} \times \sqrt{(-1)^2 + (-2)^2 + 0^2} = \frac{1}{2} \times \sqrt{30} \times \sqrt{5} = \frac{5}{2}\sqrt{6}$

Alors $\mathcal{V}_{ABCD} = \frac{1}{3} \mathcal{A}_{ABC} \times DH = \frac{1}{3} \times \frac{5}{2}\sqrt{6} \times \frac{2}{3}\sqrt{6} = \frac{5}{9} \times 6 = \frac{10}{3}$

6. La droite d a pour vecteur directeur $\vec{v} \begin{pmatrix} -2 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix}$ et le plan (ABC) a pour vecteur normal $\vec{u} \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$

On a $\vec{v} \cdot \vec{u} = -4 + 3 + 1 = 0$ Les vecteurs sont orthogonaux, donc **la droite d est parallèle au plan (ABC)**