

Corrigé Exercice 6

Partie A

1. a. $f'(x) = e^x \sin(x) + e^x \cos(x) = e^x[\sin(x) + \cos(x)]$ CQFD

b. Sur $\left[0; \frac{\pi}{2}\right]$, on a $\cos x \geq 0$ et $\sin x \geq 0$ donc $\sin(x) + \cos(x) \geq 0$ et comme le cosinus et le sinus ne sont pas nuls pour les mêmes valeurs, on a même $\sin(x) + \cos(x) > 0$. De plus l'exponentielle est toujours strictement positive, donc on a $f'(x) > 0$ et la **fonction f est bien croissante sur l'intervalle $\left[0; \frac{\pi}{2}\right]$**

2. a. On a $f(0) = e^0 \sin(0) = 0$ et $f'(x) = e^0[\sin(0) + \cos(0)] = 1(0 + 1) = 1$

On a alors l'équation de la tangente en 0 : $y = f'(0)(x - 0) + f(0) \Leftrightarrow y = x$

b. $f''(x) = e^x[\sin(x) + \cos(x)] + e^x[\cos(x) - \sin(x)] = e^x(\sin(x) + \cos(x) + \cos(x) - \sin(x))$
 $= 2e^x \cos x$

Or, sur $\left[0; \frac{\pi}{2}\right]$, on a $\cos x \geq 0$ donc $f''(x) \geq 0$ et la fonction f est bien convexe sur l'intervalle $\left[0; \frac{\pi}{2}\right]$

c. Comme la fonction f est convexe sur $\left[0; \frac{\pi}{2}\right]$, sa courbe est au-dessus de ses tangentes, en particulier de sa tangente T en 0 : on a $f(x) \geq y \Leftrightarrow e^x \sin(x) \geq x$.

3. $f''(x) = 0 \Leftrightarrow \cos x = 0 \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{2}$ puis sur $\left[\frac{\pi}{2}; \pi\right]$, on a $\cos x \leq 0$, donc $f''(x) \leq 0$ et la fonction f change de convexité : le point d'abscisse $x = \frac{\pi}{2}$ est **bien un point d'inflexion de la courbe de f**

Partie B

1) 1^{ère} intégration par partie

Avec $u = e^x$ et $v' = \sin x$

Donc $u' = e^x$ et $v = -\cos x$

$$\begin{aligned} I &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} e^x \sin(x) dx = [-e^x \cos x]_0^{\frac{\pi}{2}} - \int_0^{\frac{\pi}{2}} -e^x \cos(x) dx \\ &= -e^{\frac{\pi}{2}} \cos \frac{\pi}{2} + e^0 \cos 0 + \int_0^{\frac{\pi}{2}} e^x \cos(x) dx \\ &= -e^{\frac{\pi}{2}} \times 0 + 1 \times 1 + J = 1 + J \end{aligned}$$

2^{ème} intégration par partie

Avec $u = \sin x$ et $v' = e^x$

Donc $u' = \cos x$ et $v = e^x$

$$\begin{aligned} I &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} e^x \sin(x) dx = [e^x \sin x]_0^{\frac{\pi}{2}} - \int_0^{\frac{\pi}{2}} e^x \cos(x) dx \\ &= e^{\frac{\pi}{2}} \sin \frac{\pi}{2} + e^0 \sin 0 - J \\ &= e^{\frac{\pi}{2}} \times 1 + 1 \times 0 + J = e^{\frac{\pi}{2}} - J \end{aligned}$$

2. $\begin{cases} I = 1 + J \\ I = e^{\frac{\pi}{2}} - J \end{cases} \Rightarrow I + I = 1 - J + e^{\frac{\pi}{2}} - J \Leftrightarrow 2I = 1 + e^{\frac{\pi}{2}} \Leftrightarrow I = \frac{1 + e^{\frac{\pi}{2}}}{2}$

3. Pour rappel, pour $x \in \left[0; \frac{\pi}{2}\right]$, on a $f(x) \geq x$ donc l'aire du domaine se calcule :

$$\begin{aligned} \mathcal{A} &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} (f(x) - x) dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} e^x \sin x dx - \int_0^{\frac{\pi}{2}} x dx = I + \left[\frac{x^2}{2} \right]_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{1 + e^{\frac{\pi}{2}}}{2} - \left(\frac{1}{2} \times \frac{\pi^2}{4} - 0 \right) \\ &= \frac{1 + e^{\frac{\pi}{2}}}{2} - \frac{\pi^2}{8} \end{aligned}$$

Corrigé Exercice 7

1. Soit f une fonction constante solution de (E_0) : on a $y = f(x) = k$ avec $k \in \mathbb{R}$ et $y' = f'(x) = 0$

Si $y' = y$ alors $k = 0$: **la seule solution constante est bien la fonction nulle**

2. Les solutions de (E_0) sont les fonctions $y = ke^x$ avec $k \in \mathbb{R}$

3. Avec $y = h(x) = 2 \cos(x) + \sin(x)$ on a $y' = h'(x) = -2 \sin x + \cos x$

Alors $y - \cos(x) - 3 \sin(x) = 2 \cos(x) + \sin(x) - \cos(x) - 3 \sin(x) = \cos x - 2 \sin x = y'$

L'égalité est vérifiée, la fonction **h est une solution particulière de (E)**

4. $f - h$ est solution de $(E_0) \Leftrightarrow (f - h)' = f - h \Leftrightarrow f' - h' = f - h \Leftrightarrow f' = f + h' - h$

Or h est solution de (E) donc $h'(x) = h(x) - \cos(x) - 3 \sin(x)$

$f - h$ est solution de $(E_0) \Leftrightarrow f' = f - \cos(x) - 3 \sin(x) \Leftrightarrow f$ est solution de (E)

5. D'après la question (2), on a $f - h = ke^x$ avec $k \in \mathbb{R}$ donc les solutions de (E) sont de la forme :

$f(x) = ke^x + 2 \cos(x) + \sin(x)$

6. $g(x) = ke^x + 2 \cos(x) + \sin(x)$ avec $g(0) = ke^0 + 2 \cos(0) + \sin(0) = 0 \Leftrightarrow k + 2 = 0 \Leftrightarrow k = -2$

Donc $g(x) = -2e^x + 2 \cos(x) + \sin(x)$

$$\begin{aligned} 7. \int_0^{\frac{\pi}{2}} (-2e^x + \sin(x) + 2 \cos(x)) dx &= [-2e^x - \cos x + 2 \sin x]_0^{\left(\frac{\pi}{2}\right)} \\ &= -2e^{\frac{\pi}{2}} - \cos \frac{\pi}{2} + 2 \sin \frac{\pi}{2} - (-2e^0 - \cos 0 + 2 \sin 0) \\ &= -2e^{\frac{\pi}{2}} + 2 - (-2 - 1) = 5 - 2e^{\frac{\pi}{2}} \end{aligned}$$

Corrigé Exercice 8

1. On a $-1 \leq \cos n \leq 1 \Leftrightarrow 1 \leq 2 + \cos n \leq 3 \Leftrightarrow \frac{1}{3} \leq \frac{1}{2 + \cos(n)} \leq 1 \Leftrightarrow \frac{n}{3} \leq \frac{n}{2 + \cos(n)} \leq n$

En particulier, donc $\frac{n}{2 + \cos(n)} \geq \frac{1}{3}n$ et comme on a $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{3}n = +\infty$, d'après le théorème de comparaison de

limite, on a bien $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n}{2 + \cos(n)} = +\infty$

Affirmation 1 : VRAIE

2. On a $-1 \leq \cos n \leq 1$

En additionnant on obtient $(x - 1)e^n - 1 \leq (x - 1)e^n + \cos n < (x - 1)e^n + 1$, et particulièrement

$u_n < (x - 1)e^n + 1$

Comme $0 \leq x < 1$ alors $x - 1 < 0$ alors $\lim_{n \rightarrow +\infty} (x - 1)e^n = -\infty$

D'après le théorème de comparaison de limites, on a bien $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = -\infty$

Affirmation 2 : VRAIE