Corrections Savoir Vp.4

Corrigé Exercice 15

1) Le plan $\mathcal{P}$ a pour vecteur normal $\vec{n}(1;-3;-2)$
H est l'intersection du plan $\mathcal{P}$ avec la droite passant par A et dirigée par $\vec{n}$.
Il existe donc un nombre t tel que : $x_H = -2 + t$; $y_H = 3 - 3t$ et $z_H = 1 - 2t$.
Et H vérifie l'équation de $\mathcal{P}$:

$$x_H - 3y_H - 2z_H - 1 = 0 \quad \Leftrightarrow -2 + t - 3(3-3t) - 2(1-2t) - 1 = 0 \quad \Leftrightarrow -14 + 14t = 0 \Leftrightarrow t = 1$$

On a donc $H(-1;0;-1)$.

2) $\mathcal{P}$ a pour vecteur normal $\vec{n}(2;-1;1)$
K est l'intersection du plan $\mathcal{P}$ avec la droite passant par O et dirigée par $\vec{n}$.
Il existe donc un nombre t tel que : $x_K = 2t$; $y_K = -t$ et $z_K = t$.
Et K vérifie l'équation de $\mathcal{P}$: $2 \times 2t - (-t) + t + 3 = 0 \quad \Leftrightarrow 6t + 3 = 0 \Leftrightarrow t = -\frac{1}{2}$
On a donc $K\left(-1;\frac{1}{2};-\frac{1}{2}\right)$.

3) a) On a $\overrightarrow{AB}(-2;-1;1)$ et $\overrightarrow{AC}(1;-1;2)$ et on constate que $\overrightarrow{AB}.\vec{n} = 2 - 5 + 3 = 0$
et que $\overrightarrow{AC}.\vec{n} = -1 - 5 + 6 = 0$ donc $\vec{n}$ est orthogonal à deux vecteurs du plan (ABC), c'est donc un vecteur normal de (ABC).
Une équation cartésienne du plan (ABC) est donc donnée par :

$$-x + 5y + 3z + 1 - 5 \times 2 - 3 \times (-1) = 0 \Leftrightarrow -x + 5y + 3z - 6 = 0$$

b) M est l'intersection du plan (ABC) avec la droite passant par O et dirigée par $\vec{n}$.
Il existe donc un nombre t tel que : $x_M = -t$; $y_M = 5t$ et $z_M = 3t$.
Et M vérifie l'équation de (ABC) : $-(-t) + 5(5t) + 3(3t) - 6 = 0 \Leftrightarrow 35t = 6 \Leftrightarrow t = \frac{6}{35}$
On a donc $M\left(-\frac{6}{35};\frac{6}{7};\frac{18}{35}\right)$.

4) $\mathcal{P}$ a pour équation : $x + y + z - 0 - 2 + 1 = 0 \Leftrightarrow x + y + z - 1 = 0$.
Les coordonnées de M vérifient : $\begin{cases} x = 0 - t = -t \\ y = 2 + 2t \\ z = -1 + t \end{cases}$
H est à l'intersection de $\mathcal{P}$ avec la droite passant par M et dirigée par $\vec{n}$.
Il existe donc un nombre α tel que : $x_H = -t + \alpha$; $y_H = 2 + 2t + 2\alpha$; $z_H = -1 + t + \alpha$.
Et H vérifie l'équation de $\mathcal{P}$: $-t + \alpha + 2 + 2t + 2\alpha - 1 + t + \alpha - 1 = 0 \Leftrightarrow 4\alpha + 2t = 0 \Leftrightarrow \alpha = \frac{t}{2}$

On obtient donc : $\begin{cases} x_H = -t + \frac{t}{2} = -\frac{t}{2} \\ y_H = 2 + 2t + 2\frac{t}{2} = 2 + 3t \\ z_H = -1 + t + \frac{t}{2} = -1 + \frac{3t}{2} \end{cases}$

Corrigé Exercice 16

1) H est à l'intersection de la droite (d) et du plan $\mathcal{P}$ passant par B et de vecteur normal $\vec{u}$.
Ce plan $\mathcal{P}$ a pour équation : $x - y + z - 1 + (-1) - 2 = 0 \Leftrightarrow x - y + z - 4 = 0$.
Et il existe un nombre t tel que : $x_H = -2 + t$; $y_H = 3 - t$ et $z_H = 1 + t$.
H vérifie l'équation du plan $\mathcal{P}$: $-2 + t - (3 - t) + 1 + t - 4 = 0 \Leftrightarrow 3t - 8 = 0 \Leftrightarrow t = \frac{8}{3}$
On a donc : $x_H = -2 + \frac{8}{3} = \frac{2}{3}$; $y_H = 3 - \frac{8}{3} = \frac{1}{3}$ et $z_H = 1 + \frac{8}{3} = \frac{11}{3}$. Donc on a : $H\left(\frac{2}{3}; \frac{1}{3}; \frac{11}{3}\right)$.

2) Δ a pour vecteur directeur $\vec{u}\begin{pmatrix}1\\-1\\3\end{pmatrix}$. P est à l'intersection de Δ et du plan $\mathcal{P}$ passant par M et de vecteur normal $\vec{u}$. Ce plan $\mathcal{P}$ a pour équation : $x - y + 3z - 2 + 5 - 3(-3) = 0 \Leftrightarrow x - y + 3z + 12 = 0$.
Le point P vérifie l'équation de $\mathcal{P}$ donc on résout : $2 + t - (1 - t) + 3(-1 + 3t) + 12 = 0$
$\Leftrightarrow 10 + 11t = 0 \Leftrightarrow t = -\frac{10}{11}$
Ainsi on obtient : $P\left(\frac{2}{11}; \frac{21}{11}; -\frac{41}{11}\right)$.

3) Le vecteur $\overrightarrow{BH}\begin{pmatrix}-1\\1\\1\end{pmatrix}$ dirige la droite (BH). Soit $\mathcal{P}$ le plan passant par $E(0;0;1)$ de vecteur norma $\overrightarrow{BH}$.
Le point K est à l'intersection de $\mathcal{P}$ et de (BH).
il existe donc un nombre α tel que $\overrightarrow{BK} = \alpha\,\overrightarrow{BH} \Rightarrow \begin{cases} x_K = 1 - \alpha \\ y_K = \alpha \\ z_K = \alpha \end{cases}$
et puisque $(EK) \perp (BH)$, on a $\overrightarrow{EK}.\overrightarrow{BH} = 0 \Rightarrow \left(\begin{pmatrix}1-\alpha\\\alpha\\\alpha\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}\right).\begin{pmatrix}-1\\1\\1\end{pmatrix} = 0$
$\Rightarrow -(1 - \alpha) + \alpha + \alpha - 1 = 0 \Rightarrow 3\alpha = 2 \Rightarrow \alpha = \frac{2}{3}$.
Ainsi on trouve : $K\left(\frac{1}{3}; \frac{2}{3}; \frac{2}{3}\right)$.

Avec la même méthode, ou en passant par l'équation du plan passant par A perpendiculaire à (BH) [qui est $-x + y + z = 0$], on trouve $L\left(\frac{2}{3}; \frac{1}{3}; \frac{1}{3}\right)$.