

Corrections Savoir Ft. 4

Corrigé Exercice 10

1) $f'(x) = 1 - \sin x$

$g'(x) = 2 \cos x + \sin x$

$h'(x) = \cos(x) \cos(x) + \sin(x) (-\sin(x)) = \cos^2 x - \sin^2 x$

$i'(x) = 2x \sin x + x^2 \cos x$

$j'(x) = -\sin x (1 - \sin x) + \cos x (-\cos x) = -\sin x + \sin^2 x - \cos^2 x$

$k(x) = \tan x = \frac{\sin x}{\cos x}$ donc $k'(x) = \frac{\cos x \times \cos x - \sin x \times (-\sin x)}{\cos^2 x} = \frac{\cos^2 x + \sin^2 x}{\cos^2 x} = \frac{1}{\cos^2 x}$

$l'(x) = 2(-\sin x) \cos^1 x = -2 \sin x \cos x$

$m(x) = \cos^2 x + \sin^2 x = 1$!!! donc $m'(x) = 0$ ☺

2) $f(x) = \sin^2 x$ sur $[0; \pi]$ donc $f'(x) = 2 \cos x \sin x$

avec $f(0) = f(\pi) = 0^2 = 0$; $f\left(\frac{\pi}{2}\right) = \left(\sin\left(\frac{\pi}{2}\right)\right)^2 = 1^2 = 1$

x	0	$\frac{\pi}{2}$	π
$\cos x$	+	0	-
$\sin x$	+	1	+
$f'(x)$	+	0	-
$f(x)$	0	↗ 1 ↘	0

$g(x) = x - 2 \cos x$ sur $\left[-\frac{\pi}{2}; \pi\right]$ donc $g'(x) = 1 + 2 \sin x$ avec $1 + 2 \sin x \geq 0 \Leftrightarrow \sin x \geq -\frac{1}{2}$

Ce qui, sur $\left[-\frac{\pi}{2}; \pi\right]$, revient à $x \geq -\frac{\pi}{6}$

Avec $g\left(-\frac{\pi}{2}\right) = -\frac{\pi}{2} - 2 \times 0 = -\frac{\pi}{2}$, $g\left(-\frac{\pi}{6}\right) = -\frac{\pi}{6} - 2 \cos\left(-\frac{\pi}{6}\right) = -\frac{\pi}{6} - 2 \frac{\sqrt{3}}{2} = -\frac{\pi}{6} - \sqrt{3}$

Et $g(\pi) = \pi - 2 \times (-1) = \pi + 2$

x	$-\frac{\pi}{2}$	$-\frac{\pi}{6}$	π
$g'(x)$	-	0	+
$g(x)$	$-\frac{\pi}{2}$ ↘	$-\frac{\pi}{6} - \sqrt{3}$	↗ $\pi + 2$

$h(x) = \frac{2 \cos x}{2 + \cos x}$ donc $h'(x) = \frac{-2 \sin x (2 + \cos x) - 2 \cos x (-\sin x)}{(2 + \cos x)^2} = \frac{-4 \sin x}{(2 + \cos x)^2}$

dénominateur toujours strictement positif... donc du signe opposé de $\sin x$

avec $h(0) = h(2\pi) = \frac{2 \times 1}{2 + 1} = \frac{2}{3}$ et $h(\pi) = \frac{2 \times (-1)}{2 - 1} = -2$

x	$-\pi$	0	π
$h'(x)$	0	+	0
$h(x)$	-2	↗ $\frac{2}{3}$ ↘	-2

Corrigé Exercice 11

$$1) f'(x) = -4 \sin\left(4x + \frac{\pi}{3}\right) \quad g'(x) = 2 \cos(2x) \quad h'(x) = 4 \cos x \sin^3 x + 4 \cos(4x)$$

$$i'(x) = -\sin\left(x - \frac{\pi}{4}\right) \sin\left(\frac{x}{2}\right) + \cos\left(x - \frac{\pi}{4}\right) \times \frac{1}{2} \cos\left(\frac{x}{2}\right)$$

$$j'(x) = 2 \cos(3x + 1) + 2x \times (-3 \sin(3x + 1)) = 2 \cos(3x + 1) - 6x \sin(3x + 1)$$

$$k'(x) = \frac{-4 \sin(2x) \times 3 \sin(2x) - 2 \cos(2x) \times 6 \cos(2x)}{(3 \sin(2x))^2} = \frac{12(\cos^2(2x) + \sin^2(2x))}{9 \sin^2(2x)} = \frac{4}{3 \sin^2(2x)}$$

$$2) f(x) = \tan\left(\frac{x}{2}\right) = \frac{\sin\left(\frac{x}{2}\right)}{\cos\left(\frac{x}{2}\right)} \text{ sur }]-\pi; \pi[$$

$$\Rightarrow f'(x) = \frac{\frac{1}{2} \cos\left(\frac{x}{2}\right) \times \cos\left(\frac{x}{2}\right) - \sin\left(\frac{x}{2}\right) \times \left(-\frac{1}{2} \sin\left(\frac{x}{2}\right)\right)}{\cos^2\left(\frac{x}{2}\right)} = \frac{1}{2} \times \frac{\cos^2\left(\frac{x}{2}\right) + \sin^2\left(\frac{x}{2}\right)}{\cos^2\left(\frac{x}{2}\right)}$$

$$f'(x) = \frac{1}{2 \cos^2\left(\frac{x}{2}\right)} \text{ strictement positif}$$

x	$-\pi$		π
$f'(x)$		+	
$f(x)$		↗	

$$g(x) = 3 \sin\left(x + \frac{\pi}{6}\right) \text{ sur } [-\pi; \pi] \Rightarrow g'(x) = 3 \cos\left(x + \frac{\pi}{6}\right)$$

$$\text{Or } \cos\left(x + \frac{\pi}{6}\right) \geq 0 \Leftrightarrow -\frac{\pi}{2} \leq x + \frac{\pi}{6} \leq \frac{\pi}{2} \Leftrightarrow -\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{6} \leq x \leq \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{6} \Leftrightarrow -\frac{2\pi}{3} \leq x \leq \frac{\pi}{3}$$

$$\text{Et on a : } g(-\pi) = 3 \sin\left(-\frac{5\pi}{6}\right) = 3 \times \left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = -\frac{3\sqrt{3}}{2} ; g\left(-\frac{2\pi}{3}\right) = 3 \sin\left(-\frac{\pi}{2}\right) = -3$$

$$g\left(\frac{\pi}{3}\right) = 3 \sin\left(\frac{\pi}{2}\right) = 3 \text{ et } g(\pi) = 3 \sin\left(\frac{7\pi}{6}\right) = -\frac{3\sqrt{3}}{2}$$

x	$-\pi$	$-\frac{2\pi}{3}$	$\frac{\pi}{3}$	π			
$g'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	
$g(x)$	$-\frac{3\sqrt{3}}{2}$	$\searrow$	-3	$\nearrow$	3	$\searrow$	$-\frac{3\sqrt{3}}{2}$

$$h(x) = \cos\left(\frac{x}{3}\right) \text{ sur } [0; \pi] \Rightarrow h'(x) = -\frac{1}{3} \sin\left(\frac{x}{3}\right)$$

$$\text{or } \sin\frac{x}{3} \geq 0 \Leftrightarrow 0 \leq \frac{x}{3} \leq \pi \Leftrightarrow 0 \leq x \leq 3\pi$$

$$\text{Avec } h(0) = \cos 0 = 1 \text{ et } h(\pi) = \cos\left(\frac{\pi}{3}\right) = \frac{1}{2}$$

x	0	π
$h'(x)$	—	
$h(x)$	1	$\searrow \quad \frac{1}{2}$

Corrigé Exercice 12

1)

$$g'(x) = \frac{(-\sin x)(1 + \sin x) - \cos x (\cos x)}{(1 + \sin x)^2} = \frac{-\sin x - \sin^2 x - \cos^2 x}{(1 + \sin x)^2}$$

$$= \frac{-\sin x - 1}{(1 + \sin x)^2}$$

x	$-\frac{\pi}{2}$	π
$g'(x)$		—
$g(x)$		↘ -1

or $-\sin x - 1 \geq 0 \Leftrightarrow \sin x \leq -1 \Leftrightarrow x \equiv -\frac{\pi}{2} [2\pi]$ or ces valeurs sont exclues de l'ensemble de définition.

2) a) En traçant les deux fonctions $\cos x$ et x il semble n'y avoir **qu'une seule intersection**.

b) On a $\cos x \in [-1; 1]$ donc si l'équation $\cos x = x$ admet une solution, **elle appartient à $[-1; 1]$**

c) Étudier le sens de variation de la fonction h sur $[-1; 1]$ par $h(x) = x - \cos x$

$h'(x) = 1 + \sin x$ et $1 + \sin x \geq 0 \Leftrightarrow \sin x \geq -1$ ce qui est toujours vrai.

Donc la dérivée h' est toujours positive, et la fonction **h est strictement croissante sur $[-1; 1]$**

d) $\cos x = x \Leftrightarrow x - \cos x = 0$

On a $h(-1) = -1 - \cos(-1) \simeq -1,5$ et $h(1) = 1 - \cos(1) \simeq 0,5$

La fonction h est continue et strictement croissante sur $[-1; 1]$, avec $0 \in [h(-1); h(1)]$.

Donc, d'après le **théorème des valeurs intermédiaires**, l'équation $h(x) = 0$ admet une unique solution α

L'équation $\cos x = x$ admet une unique solution α

e) On trouve **$\alpha \simeq 0,739$**

3) a) $f(-x) = -2x + \sin(-2x) = -2x - \sin 2x = -(2x + \sin 2x) = -f(x)$

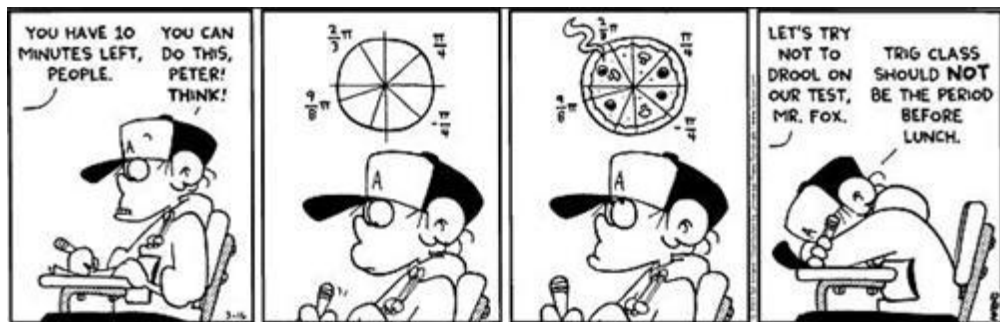
La fonction **f est impaire**, elle admet l'origine **O comme centre de symétrie**

b) $f'(x) = 2 + 2 \cos 2x = 2(1 + \cos 2x)$ CQFD

c) $1 + \cos 2x \geq 0 \Leftrightarrow \cos 2x \geq -1$ ce qui est toujours vrai. La dérivée f' est toujours positive, donc la fonction **f est strictement croissante sur $\left[0; \frac{\pi}{2}\right]$**

d) $f\left(-\frac{\pi}{2}\right) = 2 \times \left(-\frac{\pi}{2}\right) + \sin\left(2 \times \left(-\frac{\pi}{2}\right)\right) = -\pi + \sin(-\pi) = -\pi$ et par symétrie $f\left(\frac{\pi}{2}\right) = \pi$

x	$-\frac{\pi}{2}$	$\frac{\pi}{2}$
$f'(x)$	+	
$f(x)$	$-\pi$	π



Corrigé Exercice 13

a) C'est la propriété de l'angle au centre : $\widehat{BOM} = 2t$

b) $\mathcal{A}(HAM) = \frac{HM \times HA}{2}$

Comme le cercle est de rayon 1, on a: $MH = \sin \widehat{HOM} = \sin(2t)$ et $OH = \cos(2t)$

Donc $HA = 1 + OH = 1 + \cos(2t)$ et $\mathcal{A}(HAM) = \frac{\sin(2t) \times (1 + \cos(2t))}{2} = \frac{1}{2} \sin 2t (1 + \cos 2t) = f(2t)$

c) $1 + \cos x \geq 0 \Leftrightarrow \cos x \geq -1$ ce qui est toujours vrai

et $\cos x - \frac{1}{2} \geq 0 \Leftrightarrow \cos x \geq \frac{1}{2}$ ce qui, sur $\left[0; \frac{\pi}{2}\right]$, revient à $0 \leq x \leq \frac{\pi}{3}$

d) donc

x	0	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$
$1 + \cos x$		+	
$\cos x - \frac{1}{2}$		+	0
$f'(x)$		+	0
$f(x)$	0	$\nearrow$	$\searrow$
		$\frac{3\sqrt{3}}{8}$	$\frac{1}{2}$

e) l'aire du triangle HAM est supérieure à 0,5 $\Leftrightarrow f(2t) \geq \frac{1}{2}$

D'après le tableau de variation et le théorème des valeurs intermédiaires, l'équation $f(x) = \frac{1}{2}$ admet une unique solution sur $\left[0; \frac{\pi}{3}\right]$ et on a comme valeur approchée $\alpha \simeq 0,57$

Donc $f(2t) \geq \frac{1}{2} \Leftrightarrow \alpha \leq 2t \leq \frac{\pi}{2} \Leftrightarrow \frac{\alpha}{4} \leq t \leq \frac{\pi}{4}$

Donc pour tous les points M tels que $\widehat{BAM} \in \left[\frac{\alpha}{4}; \frac{\pi}{4}\right]$, l'aire du triangle HAM est supérieure à 0,5