Savoir M. 2 - Opérations

Entraînement 1

1) On donne :

$$A=\begin{pmatrix}3 & -2 & 0\\ 0 & 1 & -1\\ 4 & 3 & 2\end{pmatrix} \quad ; \quad B=\begin{pmatrix}0 & -4 & -2\\ 1 & 0 & 0\\ -1 & 2 & 3\end{pmatrix} \quad ; \quad C=\begin{pmatrix}4 & 2 & 1\\ 9 & -3 & -1\end{pmatrix} \quad et \quad D=\begin{pmatrix}5 & -3\\ 2 & -1\end{pmatrix}$$

Effectuer, quand c'est possible, les opérations suivantes, en signalant bien quand ce n'est pas possible

a. $B\times A$ **b.** $B\times C$ **c.** $D\times C$ **d.** $A-B$ **e.** $-\frac{1}{3}C$ **f.** D^3

2) Soit $E=\begin{pmatrix}4 & 0 & 1\\ -1 & 3 & -1\\ 1 & 0 & 2\end{pmatrix}$. I_3 est la matrice identité d'ordre 3.

Déterminer la matrice M telle que $E=3I_3-\frac{1}{2}M$

3) Soit $M=\begin{pmatrix}-2 & 4\\ 3 & -5\end{pmatrix}$; $J=\begin{pmatrix}1 & 1\\ 0 & 1\end{pmatrix}$ et $A=\begin{pmatrix}0 & 2\\ 1 & -1\end{pmatrix}$

Déterminer x et y tels que : $M=xI_2+yA$

Entraînement 2

1) On donne :

$$A=\begin{pmatrix}5 & 2 & 0\\ -1 & 0 & -1\\ 0 & 2 & 1\end{pmatrix} \quad ; \quad B=\begin{pmatrix}5 & -1 & 2\\ 0 & 5 & 8\end{pmatrix} \quad ; \quad C=\begin{pmatrix}2 & 5\\ -3 & 0\\ 1 & -4\end{pmatrix} \quad et \quad D=\begin{pmatrix}-4 & 1 & 0\\ -2 & 3 & 6\end{pmatrix}$$

Effectuer, quand c'est possible, les opérations suivantes, en signalant bien quand ce n'est pas possible

a. $A\times B$ **b.** $A\times C$ **c.** $B+C$ **d.** $B-D$ **e.** $C\times B$ **f.** $-2A$

2) Soit $E=\begin{pmatrix}8 & 4 & 2\\ 2 & 6 & 0\\ -10 & -2 & -12\end{pmatrix}$. I_3 est la matrice identité d'ordre 3.

Déterminer la matrice M telle que $E=2M-6I_3$

3) Soit $F=\begin{pmatrix}-1 & 2\\ 3 & -1\end{pmatrix}$; $J=\begin{pmatrix}1 & 1\\ 0 & 1\end{pmatrix}$ et $K=\begin{pmatrix}-1 & 0\\ 1 & -1\end{pmatrix}$

Déterminer n et p tels que : $F=nJ+pK$

Corrigé Savoir M.2

Corrigé Entraînement 1

1) a. $B\times A=\begin{pmatrix}0-2+0 & -12+0+0 & -6+0+0\\ 0+1+1 & 0+0-2 & 0+0-3\\ 0+3-2 & -16+0+4 & -8+0+6\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\mathbf{-2} & \mathbf{-12} & \mathbf{-6}\\ \mathbf{2} & \mathbf{-2} & \mathbf{-3}\\ \mathbf{1} & \mathbf{-12} & \mathbf{-2}\end{pmatrix}$ **b.** $B\times C$ impossible

c. $D\times C=\begin{pmatrix}20-27 & 10+9 & 5+3\\ 8-9 & 4+3 & 2+1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\mathbf{-7} & \mathbf{19} & \mathbf{8}\\ \mathbf{-1} & \mathbf{7} & \mathbf{3}\end{pmatrix}$

d. $A-B=\begin{pmatrix}3 & -2+4 & 0+2\\ 0-1 & 1 & -1\\ 4+1 & 3-2 & 2-3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\mathbf{3} & \mathbf{2} & \mathbf{2}\\ \mathbf{-1} & \mathbf{1} & \mathbf{-1}\\ \mathbf{5} & \mathbf{1} & \mathbf{-1}\end{pmatrix}$

e. $-\frac{1}{3}3C=\begin{pmatrix}\frac{4}{3} & -\frac{2}{3} & -\frac{1}{3}\\ -3 & 1 & \frac{1}{3}\end{pmatrix}$ **f.** $D^2=\begin{pmatrix}25-6 & -15+3\\ 10-2 & -6+1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}19 & -12\\ 8 & -5\end{pmatrix}$

et $D^3=\begin{pmatrix}95-24 & -57+12\\ 40-10 & -24+5\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\mathbf{71} & \mathbf{-45}\\ \mathbf{30} & \mathbf{-19}\end{pmatrix}$

2) On a $E=3I_3-\frac{1}{2}M \iff -\frac{1}{2}M=E+3I_3 \iff \boldsymbol{M=-2E-6I_3}$

donc $M=-2\begin{pmatrix}4 & 0 & 1\\ -1 & 3 & -1\\ 1 & 0 & 2\end{pmatrix}-6\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-8-6 & 0 & -2\\ 2 & -6-6 & 2\\ -2 & 0 & -4-6\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\mathbf{-14} & \mathbf{0} & \mathbf{-2}\\ \mathbf{2} & \mathbf{-12} & \mathbf{2}\\ \mathbf{-2} & \mathbf{0} & \mathbf{-10}\end{pmatrix}$

3) $M=xI_2+yA \iff \begin{pmatrix}-2 & 4\\ 3 & -5\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}x & x\\ 0 & x\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}0 & 2y\\ y & -y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}x & x+2y\\ y & x-y\end{pmatrix}$

On a donc : $\begin{cases}-2=x\\ 4=x+2y\\ 3=y\\ -5=x-y\end{cases} \iff \begin{cases}x=-2\\ 4=-2+2y\\ y=3\\ -5=-2-y\end{cases} \iff \begin{cases}x=-2\\ 2y=6\\ y=3\\ y=-2+5\end{cases} \iff \begin{cases}x=-2\\ y=3\\ y=3\\ y=3\end{cases}$

Donc $\boldsymbol{M=-2I_2+3A}$

Corrigé Entraînement 2

1) a. $A\times B$ est impossible **c.** $B+C$ est impossible

b. $A\times C=\begin{pmatrix}5 & 2 & 0\\ -1 & 0 & -1\\ 0 & 2 & 1\end{pmatrix}\times\begin{pmatrix}2 & 5\\ -3 & 0\\ 1 & -4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}10-6+0 & 25+0+0\\ -2+0-1 & -5+0+4\\ 0-6+1 & 0+0-4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\mathbf{4} & \mathbf{25}\\ \mathbf{-3} & \mathbf{-1}\\ \mathbf{-5} & \mathbf{-4}\end{pmatrix}$

d. $B-D=\begin{pmatrix}5 & -1 & 2\\ 0 & 5 & 8\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}-4 & 1 & 0\\ -2 & 3 & 6\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\mathbf{9} & \mathbf{-2} & \mathbf{2}\\ \mathbf{2} & \mathbf{2} & \mathbf{2}\end{pmatrix}$

e. $C\times B=\begin{pmatrix}2 & 5\\ -3 & 0\\ 1 & -4\end{pmatrix}\times\begin{pmatrix}5 & -1 & 2\\ 0 & 5 & 8\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}10 & -2+25 & 4+40\\ -15 & 3 & -6\\ 5 & -1-20 & 2-32\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\mathbf{10} & \mathbf{23} & \mathbf{44}\\ \mathbf{-15} & \mathbf{3} & \mathbf{-6}\\ \mathbf{5} & \mathbf{-21} & \mathbf{-30}\end{pmatrix}$

f. $-2A=\begin{pmatrix}\mathbf{-10} & \mathbf{-4} & \mathbf{0}\\ \mathbf{2} & \mathbf{0} & \mathbf{2}\\ \mathbf{0} & \mathbf{-4} & \mathbf{-2}\end{pmatrix}$

2) On a $E=2M-6I_3 \iff 2M=E+6I_3 \iff M=\frac{1}{2}E+3I_3$

donc $M=\frac{1}{2}\begin{pmatrix}8 & 4 & 2\\ 2 & 6 & 0\\ -10 & -2 & -12\end{pmatrix}+3\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}4+3 & 2 & 1\\ 1 & 3+3 & 0\\ -5 & -1 & -6+3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\mathbf{7} & \mathbf{2} & \mathbf{1}\\ \mathbf{1} & \mathbf{6} & \mathbf{0}\\ \mathbf{-5} & \mathbf{-1} & \mathbf{-3}\end{pmatrix}$

3) $F = nJ + pK \iff \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 3 & -1 \end{pmatrix} = n\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + p\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} n-p & n \\ p & n-p \end{pmatrix}$

$\Rightarrow \begin{cases} n-p=-1 \\ n=2 \\ p=3 \\ n-p=-1 \end{cases} \iff \begin{cases} n-3=-1 \\ n=2 \\ p=3 \\ n-3=-1 \end{cases} \iff \begin{cases} n=2 \\ n=2 \\ p=3 \\ n=2 \end{cases}$ donc $\boldsymbol{F = 2J + 3K}$