

Corrigé Exercice 3

1. a. On a $F' = f$, donc f est négative sur $[2; 5]$ et positive sur $[5; 7]$.
 b. f s'annule donc en $x = 5$: c'est la solution de l'équation $f(x) = 0$.
2. a. Sur $[-1; 1]$, on a $g(x) > 1$ donc l'équation $g(x) = 0$ n'a pas de solution.
 Sur $[1; 3]$, g est continue et strictement décroissante, avec $f(1) > 0 > f(3)$, donc d'après le théorème des valeurs intermédiaires, l'équation $g(x) = 0$ a une seule solution α .
 Au total, l'équation $g(x) = 0$ a une seule solution sur $[-1; 3]$.
 b. On en déduit que g est positive sur $[-1; \alpha]$ et négative sur $[\alpha; 3]$. G est donc croissante sur $[-1; \alpha]$ et décroissante sur $[\alpha; 3]$.

Corrigé Exercice 4

1. La courbe Γ indique que F est décroissante-croissante-décroissante, donc la fonction $f = F'$ doit être négative-positive-négative. C'est donc la courbe C_2 qui correspond à la fonction f .
 (Autre argument : $F' = f$ s'annule une 1^{re} fois sur $[-1; 0]$ puis une 2^e fois sur $[2; 3]$, comme c'est le cas pour la fonction de la courbe C_2).
 (Autre argument : La courbe Γ est convexe jusqu'à $x = 1$ puis concave, donc f est $\nearrow$ puis $\searrow$...).
2. La courbe K indique que g est négative puis positive, donc sa primitive est $\searrow$ puis $\nearrow$, mais c'est le cas pour les deux courbes C_1 et C_2 .
 Mais $g = G'$ est croissante, donc $g' = G''$ est positive et G est donc convexe, comme la courbe C_1 .
 C'est donc C_1 qui représente la fonction G .

Corrigé Exercice 5

Appelons f_k la fonction représentée par la courbe C_k (pour $k \in \{1; 2; 3\}$).

On a : $f_3'(0) = f_2(0) = 0$ et il y a un nombre $\alpha \in [-1; -\frac{1}{2}]$ tel que $f_3''(\alpha) = f_2'(\alpha) = f_1(\alpha) = 0$ (il y a un point d'inflexion de C_3 en $x = \alpha$).

On a donc : $F = f_3$ représentée par C_3 , $f = f_2$ représentée par C_2 et $f' = f_1$ représentée par C_1 .

Corrigé Exercice 6

1. a. Si $f = F'$ est positive, alors F est croissante.
 b. Si $f' = F''$ est négative, alors f est décroissante et F est concave.
 c. Si $f = F'$ est croissante, alors $f' = F''$ est positive et F est convexe.
 d. Si F est concave, alors $f = F'$ est décroissante et $f' = F''$ est négative.
2. a. On a $G' = g$. Or g est positive. Donc G est croissante.
 b. On a $G''(x) = g'(x) = -2xe^{-x^2}$. Donc G'' est positive sur $\mathbb{R}^-$ et négative sur $\mathbb{R}^+$.
 Ainsi, G est convexe sur $\mathbb{R}^-$ et concave sur $\mathbb{R}^+$.
 c. On a $g''(x) = -2e^{-x^2} + 4x^2e^{-x^2} = 2(2x^2 - 1)e^{-x^2}$. Les racines de $2x^2 - 1$ sont $-\frac{1}{\sqrt{2}}$ et $\frac{1}{\sqrt{2}}$.
 g'' est donc négative sur $[-\frac{1}{\sqrt{2}}; \frac{1}{\sqrt{2}}]$ et positive ailleurs.
 g est donc concave sur $[-\frac{1}{\sqrt{2}}; \frac{1}{\sqrt{2}}]$ et convexe sur $]-\infty; -\frac{1}{\sqrt{2}}]$ et sur $[\frac{1}{\sqrt{2}}; +\infty[$.

3. a. On a : $H' = h$. Or x^2 est positif et $\ln$ est négatif sur $]0; 1]$ et positif sur $[1; +\infty[$.

Donc H est décroissante sur $]0; 1]$ et croissante sur $[1; +\infty[$.

b. On a : $H''(x) = h'(x) = 2x \ln x + x^2 \times \frac{1}{x} = x(2 \ln x + 1)$.

On résout : $2 \ln x + 1 \geq 0 \Leftrightarrow \ln x \geq -\frac{1}{2} \Leftrightarrow x \geq e^{-1/2} \Leftrightarrow x \geq \frac{1}{\sqrt{e}}$.

H'' étant alors négative sur $]0; \frac{1}{\sqrt{e}}]$ et positive sur $[\frac{1}{\sqrt{e}}; +\infty[$, la fonction H est concave sur $]0; \frac{1}{\sqrt{e}}]$ et convexe sur $[\frac{1}{\sqrt{e}}; +\infty[$.