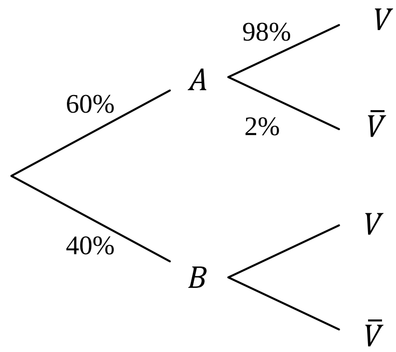
CORRECTION Sujets "type bac"

Exercice 1 : Corrigés



1. L'énoncé donne : $p(V) = 0{,}96$; $p(A) = 0{,}6$ et $p_A(V) = 0{,}98$.
On a donc $p(A \cap V) = p(A) \times p_A(V) = 0{,}6 \times 0{,}98 = 0{,}588$.
Il y a donc 58,8% de chances que la bille choisie soit vendable et provienne de la machine A.

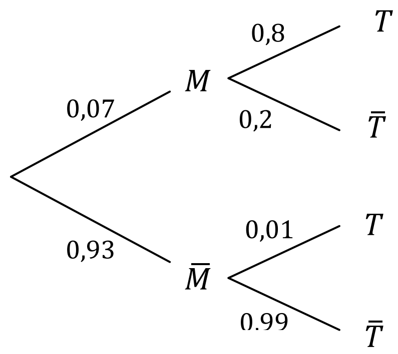
2. On a $p(A \cap V) + p(B \cap V) = p(V)$ (formule des probabilités totales).
Donc en effet : $p(B \cap V) = 0{,}96 - 0{,}588 = 0{,}372$.
On a alors :

$$p_B(V) = \frac{p(B \cap V)}{p(B)} = \frac{0{,}372}{1 - 0{,}6} = 0{,}93$$

Il y a donc 93% de chances que la bille choisie soit vendable sachant qu'elle provient de la machine B.

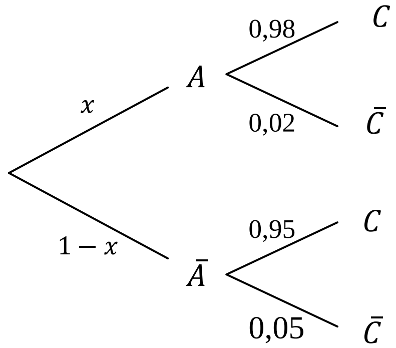
3. On a $p(B \cap \bar{V}) = p(B) - p(B \cap V) = 0{,}4 - 0{,}372 = 0{,}028$. Il y a donc 2,8% de billes non vendables provenant de B par rapport à un total de 4% de billes non vendables. Les billes non vendables provenant de B représentent donc $\frac{0{,}028}{0{,}04} = 0{,}7 = 70\%$ des billes non vendables (autrement dit, il s'agit de $p_{\bar{V}}(B)$).
Le technicien a donc effectivement raison.

Exercice 2 : Corrigés



1. Voir l'arbre ci-contre.
   On a : $p(M \cap T) = p(M) \times p_M(T) = 0{,}07 \times 0{,}8 = 0{,}056$.
2. On a :
   $p(T) = p(M \cap T) + p(\bar{M} \cap T) = 0{,}056 + 0{,}93 \times 0{,}01 = 0{,}0653$.
   La probabilité que le test de la personne choisie au hasard soit positif est donc bien égale à 0,0653.
3. Tout dépend de quel point de vue on se place (question très mal posée et pas du tout mathématique).
   Dans le cas d'un individu qui se retrouve avec un test positif, l'individu peut avoir envie de savoir quelle est la probabilité qu'il soit vraiment malade ($p_T(M)$). C'est la réponse que semble attendre l'énoncé.
   Mais dans le cadre collectif, les épidémiologistes aux notions plus importantes de $p_M(T)$ (qui s'appelle la sensibilité du test) et de $p_{\bar{M}}(\bar{T})$ (qui s'appelle la spécificité du test).
   Car quand on obtient un test positif, même s'il y a une probabilité qu'en fait on ne soit pas malade, on doit agir comme si on était malade à coup sûr, pour protéger les autres.
4. On cherche: $p_T(M) = \frac{p(M \cap T)}{p(T)} = \frac{0{,}056}{0{,}0653} \simeq 0{,}86$.

Exercice 3 : Corrigés



1. L'énoncé donne : $p(A) = x$; $p_A(C) = 0{,}98$ et $p_{\bar{A}}(C) = 0{,}95$.
On a alors $p(\bar{A}) = 1 - x$.
On a donc :

$$\begin{aligned} p(C) &= p(C \cap A) + p(C \cap \bar{A}) = p(A)p_A(C) + p(\bar{A})p_{\bar{A}}(C) \\ &= 0{,}98x + 0{,}95(1-x) \end{aligned}$$

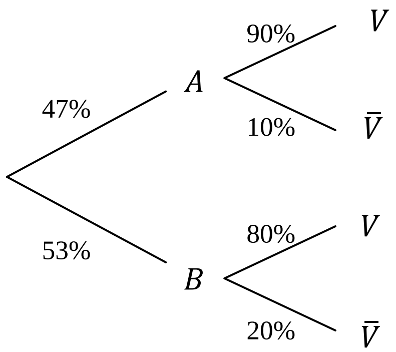
Donc en effet : $p(C) = 0{,}03x + 0{,}95$.

2. On donne ici $p(C) = 0{,}96 \iff 0{,}03x + 0{,}95 = 0{,}96$

$$\iff 0{,}03x = 0{,}01 \iff x = \frac{1}{3}.$$

On a alors : $p(A) = x = \frac{1}{3}$ et $p(\bar{A}) = 1 - \frac{1}{3} = \frac{2}{3} = 2 \times \frac{1}{3} = 2\,p(A)$.
La probabilité que la tablette provienne de la chaîne B est donc effectivement « deux fois égale à celle » (deux fois plus grande que celle) **que la tablette provienne de la chaîne A.**

Exercice 4 : Corrigés



1. L'énoncé donne : $p(A) = 0{,}47$; $p_A(\bar{V}) = 0{,}1$ et $p_B(\bar{V}) = 0{,}2$.
Voir l'arbre ci-contre.

2. a. On a : $p(V) = p(A \cap V) + p(B \cap V) = p(A)p_A(V) + p(B)p_B(V)$

$$= 0{,}47 \times 0{,}9 + 0{,}53 \times 0{,}8 = 0{,}847$$

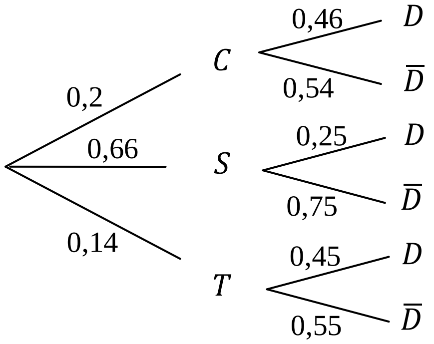
Il y a donc 84,7% de chances que la personne interrogée dise la vérité.

b. On a : $p_V(A) = \frac{0{,}47 \times 0{,}9}{p(V)} = \frac{0{,}461 \times 0{,}064}{0{,}847} \simeq 0{,}4994$.
Sachant que la personne interrogée dit la vérité, il y a donc environ 49,94% de chances qu'elle affirme vouloir voter pour le candidat A.

3. Si la personne choisie vote effectivement pour le candidat A, c'est que soit elle a déclaré voter A sans mentir ($A \cap V$), soit elle a déclaré voter pour B mais a menti ($B \cap \bar{V}$).
Ces deux événements étant disjoints, la probabilité demandée est donc :
$p(A \cap V) + p(B \cap \bar{V}) = 0{,}47 \times 0{,}9 + 0{,}53 \times 0{,}2 = 0{,}529$. CQFD.

Exercice 5 : Corrigés

1.



2. a. $p(C \cap D) = p(C) \times p_C(D) = 0{,}2 \times 0{,}46 = 0{,}092$.

b. On a : $p(D) = p(C \cap D) + p(S \cap D) + p(T \cap D)$

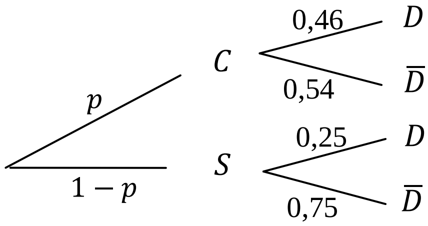
$$= 0{,}092 + 0{,}66 \times 0{,}25 + 0{,}14 \times 0{,}45 = 0{,}32.$$

Donc il y a en effet 32% de chances que la planche soit déclassée.

c. On a : $p_D(C) = \frac{p(C \cap D)}{p(D)} = \frac{0{,}092}{0{,}32} = 0{,}2875$.

Il y a donc 28,75% de chances que la planche déclassée soit en chêne.

3. Soit $p = p(C)$. On obtient dans cette situation l'arbre suivant :



On veut obtenir : $p(D) \leq 0{,}28$ or $p(D) = 0{,}46p + 0{,}25(1-p)$.

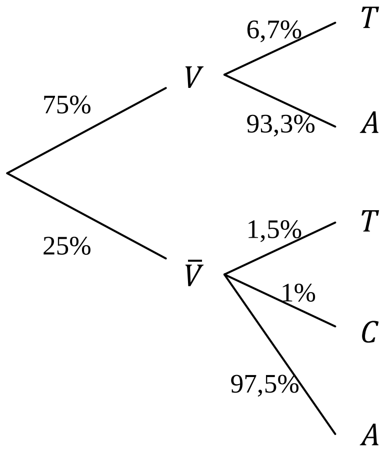
On doit donc résoudre :

$$0{,}46p + 0{,}25(1-p) \leq 0{,}28 \Leftrightarrow 0{,}21p + 0{,}25 \leq 0{,}28$$

$$\Leftrightarrow 0{,}21p \leq 0{,}03 \Leftrightarrow p \leq \frac{0{,}03}{0{,}21} \Leftrightarrow p \leq \frac{1}{7}$$

Il faut donc produire moins d'une planche sur 7 qui soit en chêne.

Exercice 6 : Corrigés



1. Appelons les événements :

- V : « le bon d'achat est vert »
- T : « avoir un bon d'achat de 30 € »
- C : « avoir un bon d'achat de 100 € »
- A : « avoir un bon d'achat d'une autre valeur »

Voir ci-contre l'arbre correspondant.

La probabilité demandée est alors : $p_{\overline{V}}(T \cup C) = p_{\overline{V}}(T) + p_{\overline{V}}(C) = 0{,}025$.

Il y a donc 2,5% de chances d'avoir un bon d'achat d'une valeur supérieure ou égale à 30 euros sachant qu'il est rouge.

2. On cherche ici : $p(T \cup C) = p(V \cap T) + p(\overline{V} \cap T) + p(V \cap C) = p(V)p_V(T) + p(\overline{V})p_{\overline{V}}(T) + +p(\overline{V})p_{\overline{V}}(C)$

$$= 0{,}75 \times 0{,}067 + 0{,}25(0{,}015 + 0{,}01) \simeq 0{,}057.$$ CQFD.