

Corrigés Savoir Df. 3

Corrigé Exercice 7

$$\begin{array}{lllll}
 f'(x) = 15x^2 & g'(x) = 2e^x & h'(x) = -\frac{4}{x^2} & i'(t) = -42t^6 & j'(x) = 0 \\
 k'(x) = +\frac{1}{2x^2} & l'(x) = \frac{6}{2\sqrt{x}} = \frac{3}{\sqrt{x}} & m'(t) = -3e^t & n'(x) = -7 & p'(x) = -\frac{5}{2x^2} \\
 q'(y) = \frac{6}{11} & r'(x) = \frac{3}{3}x^2 = x^2 & s'(x) = 24x & t'(x) = \frac{1}{6\sqrt{x}} & u'(x) = 0,6x^3 \\
 v'(x) = 0 & w'(a) = 28a^3 & a'(x) = -\frac{e^x}{e} & b'(x) = \frac{1}{3x^2} & c'(x) = -\frac{10}{15}x^4 = -\frac{2}{3}x^4
 \end{array}$$

Corrigé Exercice 8

1)

$$\begin{array}{llll}
 f'(x) = 6x^2 - 10x & g'(x) = 4x^3 - 9x^2 + 2 & h'(t) = 28t^3 - 2t & i'(x) = \frac{3}{2}x^2 - 12x + 1 \\
 j'(x) = 0,5x^4 - 0,6x^2 & k'(x) = \frac{12}{4}x^3 - \frac{2}{4}x - 1 = 3x^3 - \frac{1}{2}x - 1 & l'(n) = \frac{2n}{2} + 5 = n + 5
 \end{array}$$

2) a. $f'(x) = 3x^2 + 12x - 15$

b, c & d. On a $\Delta = 324$; $x_1 = 1$ et $x_2 = -5$ positif à l'extérieur des racines

Pour les extrema, on a $f(-5) = (-5)^3 + 6 \times (-5)^2 - 15 \times (-5) - 7 = 93$

Et $f(1) = 1^3 + 6 \times 1^2 - 15 \times 1 - 7 = 1$

Donc

x	$-\infty$	-5	1	$+\infty$
$f'(x)$		$+$ 0 $-$	0 $+$	
$f(x)$		$\nearrow$ 93 $\searrow$	1 $\nearrow$	

3) a. $g'(x) = 2x^2 - 12x + 18$

b. & c. On a $\Delta = 0$; $x_0 = 3$ positif partout

on a $g(3) = \frac{2 \times 3^3}{3} - 6 \times 3^2 + 18 \times 3 - 1 = 17$ mais ce n'est pas un extremum ! Pour que le point où $f'(x) = 0$ soit un extremum, il faut que la dérivée y change de signe... Sinon c'est un point d'inflexion, mais vous verrez ça l'année prochaine

x	$-\infty$	3	$+\infty$
$g'(x)$		$+$ 0 $+$	
$g(x)$		$\nearrow$ 17 $\nearrow$	

4) $f(x) = \frac{x^4}{2} - \frac{4x^3}{3} - 5x^2 + 12x + 1$

a. $f'(x) = 2x^3 - 4x^2 - 10x + 12$

b. On a $2(x-3)(x^2+x-2) = 2(x^3+x^2-2x-3x^2-3x+6) = 2(x^3-2x^2-5x+6)$
 $= 2x^3 - 4x^2 - 10x + 12 = f'(x)$ CQFD

c. & d. Pour $x^2 + x - 2$, on a $\Delta = 9$; $x_1 = 1$ et $x_2 = -2$ positif à l'extérieur des racines

On a pour les extrema : $f(-2) = \frac{(-2)^4}{2} - \frac{4 \times (-2)^3}{3} - 5 \times (-2)^2 + 12 \times (-2) + 1 = -\frac{73}{3}$

$$f(1) = \frac{43}{6} \text{ et } f(3) = -\frac{7}{2}$$

(Utiliser le tableau de la calculatrice dès que vous dépassez 2 valeurs à calculer)

x	$-\infty$	-2	1	3	$+\infty$
$x - 3$	$-$	$ $	$-$	$ $	$+$
$x^2 + x - 2$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f'(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$
$f(x)$	$\searrow$	$-\frac{73}{3}$	$\nearrow$	$\frac{43}{6}$	$\searrow$

e. Sur $x \in [-2 ; 3]$, le **maximum** de la fonction est $\frac{43}{6}$, donc on a bien $f(x) \leq \frac{43}{6}$

Corrigé Vers la spé term

1) Il faut dériver en regardant m comme une constante, comme si c'était un 2 ou un 3

$$f'(x) = mx^2 - 2mx + m - 1$$

$$2) a. \Rightarrow \Delta_m = 4m^2 - 4m(m - 1) = 4m$$

Comment chercher :

La fonction f sera strictement décroissante si sa dérivée f' est strictement négative.

Or le signe de la dérivée dépend de m ...

• si $m > 0$, le Δ_m sera positif, et le polynôme $f'(x) = mx^2 - 2mx + m - 1$ changera de signe (du signe de m à l'extérieur des racines, donc ici positif, négatif à l'intérieur...)

• Par contre, si $m < 0$, Δ_m sera négatif et le polynôme $f'(x) = mx^2 - 2mx + m - 1$ n'aura pas de racine : il sera de signe constant, du signe de m , c'est-à-dire, dans notre hypothèse, négatif...

On reconstruit le raisonnement dans l'autre sens pour rédiger :

Si $m < 0$, $\Delta_m < 0$, la dérivée $f'(x) = mx^2 - 2mx + m - 1$ est de signe constant, celui de m donc négatif. Et par conséquent la fonction sera strictement décroissante.

$$b. m = -1 \Rightarrow \text{On a } f'(x) = -x^2 + 2x - 3$$

$$\Delta = -4 \text{ (} f' \text{ est de signe constant, négatif (on le savait))}$$

x	$-\infty$	$+\infty$
$f'(x)$	$-$	$-$
$f(x)$	$\searrow$	$\searrow$

Corrigé Exercice 9

1)

$$f'(x) = 3e^x - 1$$

$$g'(x) = 4 + \frac{1}{x^2}$$

$$h'(x) = \frac{3}{\sqrt{x}}$$

$$i'(x) = \frac{-5}{x^2} + \frac{1}{4}$$

$$j'(x) = 4x - 5e^x$$

$$k'(t) = t - 3 - \frac{4}{3t^2}$$

$$l'(n) = \frac{1}{6\sqrt{n}} - 4$$

$$m'(a) = -e^a$$

$$2) a. f'(x) = 1 - \frac{4}{x^2}. \text{ On a } \frac{x^2 - 4}{x^2} = \frac{x^2}{x^2} - \frac{4}{x^2} = 1 - \frac{4}{x^2} = f'(x) \text{ CQFD}$$

$$b. \text{ et } c. \text{ Pour les extrema on a : } f(-2) = -2 + 6 + \frac{4}{-2} = 2 \text{ et } f(2) = 10$$

Voir tableau page suivante

x	$-\infty$	-2	0	2	$+\infty$
$x^2 - 4$		$+$	0	$-$	$+$
x^2		$+$	$ $	$+$	$+$
$g'(x)$		$+$	0	$-$	$+$
$g(x)$		$\nearrow$	2	$\searrow$	10

Corrigé Exercice 10

1. $h'(x) = -3x^2 + 60x - 108$

2. a. $\mathcal{C}$ est la courbe $\mathcal{C}_2$ et $\mathcal{C}'$ est la courbe $\mathcal{C}_1$

Pour trouver, on compare les tableaux de variations et tableaux de signes :

x	-6	2	18	26		
$\mathcal{C}_1$		$-$	$\mathbf{0}$	$+$	$\mathbf{0}$	$-$

x	-6	10	26
$\mathcal{C}_1$		$\nearrow$	$\searrow$

x	-6	$-2,5$	$7,5$	25	26		
$\mathcal{C}_2$	$+$	$\mathbf{0}$	$-$	$\mathbf{0}$	$+$	0	$-$

x	-6	2	18	26
$\mathcal{C}_2$		$\searrow$	$\nearrow$	$\searrow$

x	-6	2	18	26
$\mathcal{C}_3$	$+$	$\mathbf{0}$	$-$	$\mathbf{0} \quad +$

x	-6	10	26
$\mathcal{C}_3$		$\searrow$	$\nearrow$

Le signe de la fonction de la courbe $\mathcal{C}_2$ ne correspond à aucune des variations des courbes $\mathcal{C}_1$ et $\mathcal{C}_3$: il s'agit donc de celle la fonction.

Du coup ses variations doivent correspondre aux signes des courbes $\mathcal{C}_1$ ou $\mathcal{C}_3$. Ce qui nous permet de choisir la $\mathcal{C}_1$ (comme expliqué au b)

b. Pour $\mathcal{C}'$ comme la fonction est décroissante par exemple sur $[-6; -2]$, sa dérivée doit être négative sur cet intervalle : cela correspond à la courbe $\mathcal{C}_1$

3. $h'(x) = -3x^2 + 60x - 108$ donc on a $\Delta = 2\,304$ et $x_1 = 2$; $x_2 = 18$ négative à l'extérieur des racines
Donc

x	0	2	18	26			
$h'(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$		
$h(x)$	-490	$\searrow$	-594	$\nearrow$	1454	$\searrow$	-594

Pour les extrema, utilisez le tableur de la calculatrice, mais attention à bien rentrer la fonction (c'est-à-dire $h(x) = -x^3 + 30x^2 - 108x - 490$... si vous rentrez la dérivée, vous aurez des zéro en 2 et 18...)

Corrigé Exercice 11

1. Pour $x = 3$ on a $b(3) = 3 \times 680 - C(3) = 2040 - (15 \times 3^3 - 120 \times 3^2 + 500 \times 3 + 750) = 465$

Le résultat de l'entreprise pour la vente de 3 kilomètres de tissu est de 465 €

$$2. B(x) = R(x) - C(x) = 680x - (15x^3 - 120x^2 + 500x + 750) \\ = 680x - 15x^3 + 120x^2 - 500x - 750 = -15x^3 + 120x^2 + 180x - 750 \quad \text{CQFD}$$

$$3. B'(x) = -45x^2 + 240x + 180$$

4. On a $\Delta = 90\,000$ et $x_1 = -\frac{1}{3}$; $x_2 = 6$ et négative à l'extérieur des racines

Donc

x	0	6	10
$B'(x)$	+	0	-
$B(x)$	-750	↗ 1410 ↘	-1950

5. L'entreprise doit produire **6 km de tissus** pour obtenir un résultat maximal de **1 410 €**

Corrigé Exercice 12

1. a. $f(x) = y \Leftrightarrow 2x^3 + 2x^2 - 2x + 3 = 2x + 3 \Leftrightarrow 2x^3 + 2x^2 - 4x = 0 \Leftrightarrow 2x(x^2 + x - 2) = 0$
CQFD

b. Pour résoudre cette équation produit nul :

soit $2x = 0 \Leftrightarrow x = 0$

soit $x^2 + x - 2 = 0 \Rightarrow \Delta = 9$ et $x_1 = -2$; $x_2 = 1$

$\Rightarrow$ On a donc $S = \{-2; 0; 1\}$

On calcule les images correspondantes

(vous pouvez calculer $f(-2)$; $f(0)$ ou $f(1)$ mais ce sera plus simple en prenant la fonction affine de d)

$y_{-2} = 2 \times (-2) + 3 = -1$; $y_0 = 3$

et $y_1 = 2 \times 1 + 3 = 5$

On a donc les coordonnées des 3 points

d'intersection : **A(-2; -1); B(0; 3) et C(1; 5)**

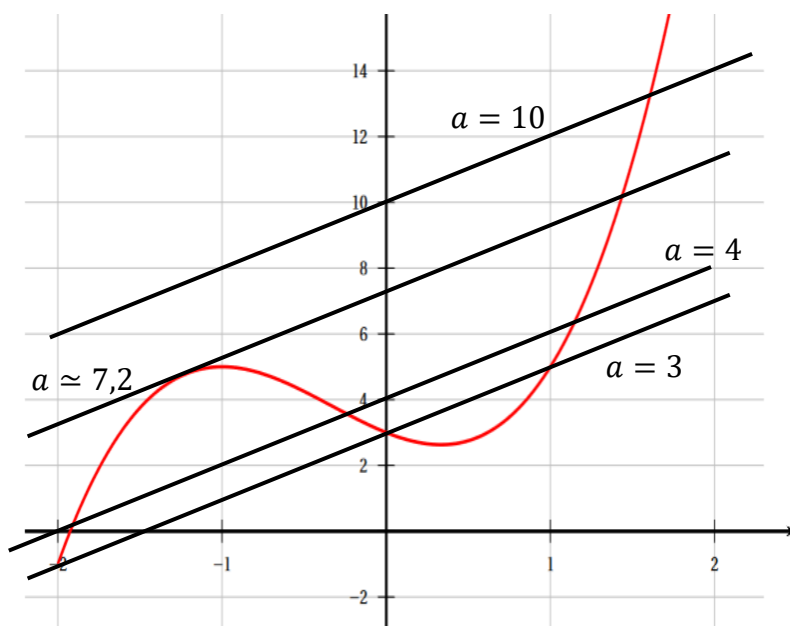
2. Toutes les droites d' ont des coefficients directeur de 2, et une ordonnée à l'origine de a .

On illustre sur le graphique pour différentes

valeurs de a : on remarque qu'à partir d'environ

$a = 7,2$ les droites d' n'auront plus qu'un seul point d'intersection...

Vous pouvez donc choisir **n'importe quelle valeur de a entre 7,5 et 22...**



3. a. $f'(x) = 6x^2 + 4x - 2$ On a $\Delta = 64$ et $x_1 = \frac{1}{3}$; $x_2 = -1$

Donc $f'(x) = a(x - x_1)(x - x_2) = 6\left(x - \frac{1}{3}\right)(x + 1)$

CQFD

(vous pouvez aussi développer le produit pour retrouver la forme réduite)

$$b. \text{ Avec } f\left(\frac{1}{3}\right) = 2 \times \left(\frac{1}{3}\right)^3 + 2 \times \left(\frac{1}{3}\right)^2 - 2 \times \frac{1}{3} + 3 \\ = \frac{2}{27} + \frac{2}{9} - \frac{2}{3} + 3 = \frac{2+6-18+81}{27} = \frac{71}{27}$$

x	-2	-1	$\frac{1}{3}$	2
$f'(x)$	+	0	-	0
$f(x)$	-1	↗ 3 ↘	$\frac{71}{27}$	↗ 23

Corrigé Exercice 13

1. Le fond de la boîte a pour longueur $24 - 2x$ et pour largeur $18 - 2x$. La boîte a comme hauteur x
Donc $V(x) = L \times \ell \times h = (24 - 2x)(18 - 2x)x = (4x^2 - 84x + 432)x = 4x^3 - 84x^2 + 432x$ CQFD

2. $V'(x) = 12x^2 - 168x + 432$

3. Pour V' , on a $\Delta = 7488$ avec $\sqrt{7488} = \sqrt{64 \times 9 \times 13} = 24\sqrt{13}$

Donc $x_1 = \frac{168+24\sqrt{13}}{24} = 7 + \sqrt{13} \simeq 10,6$ et $x_2 = 7 - \sqrt{13} \simeq 3,4$ et positive à l'extérieur des racines

On a alors

x	0	$7 - \sqrt{13}$	9
$V'(x)$	+	0	-
$V(x)$	0 ↗	$\simeq 655$	↘ 0

On va vous épargner le calcul de la valeur exacte : $V(7 - \sqrt{13}) = 4 \times (7 - \sqrt{13})^3 - 84 \times (7 - \sqrt{13})^2 + 432 \times (7 - \sqrt{13})$
Mais pour avoir une valeur approchée la plus exacte possible, calculer avec plusieurs chiffres significatifs
Par ex : $7 - \sqrt{13} \simeq 3,3944$ Alors $V(7 - \sqrt{13}) \simeq 654,97$

4. La contenance de la boîte est maximale pour $x = 7 - \sqrt{13}$ soit environ 3,4 cm

5. Oui, le volume **maximal**, d'après le tableau de variation, est **d'environ 655 cm³**, une contenance dont légèrement supérieure à 650 cm³

Corrigé Exercice 14

1. $g'(x) = e^x - 1$

2. On cherche à résoudre $e^x - 1 \geq 0 \Leftrightarrow e^x \geq 1 \Leftrightarrow e^x \geq e^0$

Comme l'exponentielle est strictement croissante, cela revient à dire que $x \geq 0$

On a donc

x	-5		0	5	
$g'(x)$	-		0	+	
$g(x)$	$e^{-5} + 6$	$\searrow$	2	$\nearrow$	$e^5 - 4$

Avec $g(-5) = e^{-5} - (-5) + 1 = e^{-5} + 6 \simeq 6$; $g(0) = e^0 - 0 + 1 = 1 + 1 = 2$
et $g(5) = e^5 - 5 + 1 = e^5 - 4 \simeq 144$

3. Pour $x \in [-5 ; 5]$, le minimum de g est 2 on a donc pour tout $x \in [-5 ; 5]$, $g(x) \geq 2 > 0$

La fonction g est bien strictement positive sur $[-5 ; 5]$

4.

x	-5	5
e^x		$+$
$g(x)$		$+$
$f'(x)$		$+$
$f(x)$	$-4 - 5e^5$	$\nearrow 6 + 5e^{-5}$

Avec $f(-5) = -5 + 1 - \frac{5}{e^{-5}} = -4 - 5e^5 \simeq -746$ et $f(5) = 5 + 1 + \frac{5}{e^5} = 6 + 5e^{-5} \simeq 6$