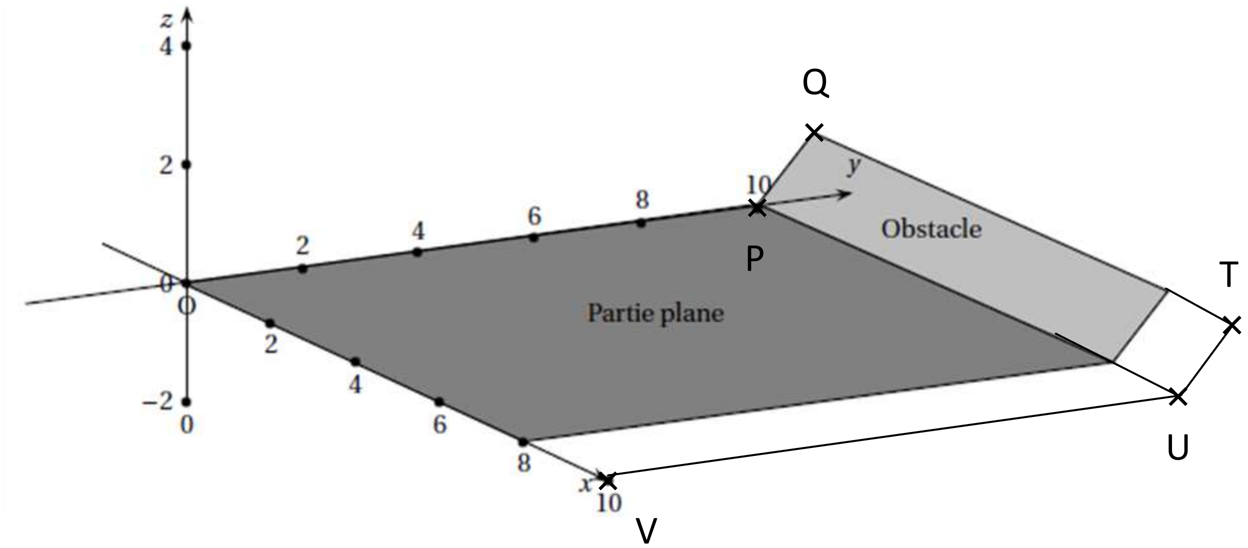
Corrections Sujet d'entraînement n°1

Corrigé Exercice 1



Partie A

1. La droite (AB) passe par $\mathrm{A}(2; 4; 0{,}25)$ et a pour vecteur directeur $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}0\\2\\0{,}5\end{pmatrix}$. On a donc comme représentation paramétrique de (AB) : $\begin{cases}x = 2\\ y = 4 + 2\boldsymbol{t}\\ z = 0{,}25 + 0{,}5\boldsymbol{t}\end{cases}$, $t \in \mathbb{R}$

2. a. Justifier que le vecteur $\vec{n}\,(0\,;1\,;-1)$ est un vecteur normal au plan (PQU).

On a $\overrightarrow{PQ}\begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix}$ donc $\vec{n}.\overrightarrow{PQ} = 0 + 1 - 1 = 0$ et $\overrightarrow{PU}\begin{pmatrix}10\\0\\0\end{pmatrix}$ donc $\vec{n}.\overrightarrow{PU} = 0 + 0 - 0 = 0$

donc le vecteur $\vec{n}$ est orthogonal à deux vecteur directeurs du plan (PQU) : c'est bien un **vecteur normal**

b. Le plan (PQU) a une équation cartésienne du type : $y - z + d = 0$

Comme $P \in (PQU)$, on a $y_P - z_P + d = 0 \iff 10 + d = 0 \iff d = -10$

Donc une équation cartésienne de (PQU) est $\boldsymbol{y - z - 10 = 0}$

3. On cherche l'intersection de la droite (AB) et du plan (PQU), donc à résoudre le système :

$$\begin{cases}x = 2\\ y = 4 + 2t\\ z = 0{,}25 + 0{,}5t\\ y - z - 10 = 0\end{cases} \Rightarrow \quad 4 + 2t - (0{,}25 + 0{,}5t) - 10 = 0 \iff 1{,}5t - 6{,}25 = 0 \iff t = \frac{6{,}25}{1{,}5} = \boldsymbol{\frac{25}{6}}$$

On remplace alors dans la représentation paramétrique pour avoir les coordonnées du point :

$$\begin{cases}x = 2\\ y = 4 + 2 \times \frac{25}{6} = \frac{74}{6} = \frac{37}{3}\\ z = 0{,}25 + 0{,}5 \times \frac{25}{6} = \frac{1}{4} + \frac{25}{12} = \frac{28}{12} = \frac{7}{3}\end{cases}$$

Donc le point d'intersection est bien le **point $\boldsymbol{I}$ de coordonnées** $\left(\boldsymbol{2\,; \frac{37}{3}; \frac{7}{3}}\right)$

4. L'intersection entre la droite (AB) et le plan de l'obstacle se fait à une hauteur d'environ 23 mètres $\left(\frac{7}{3} \simeq 2{,}3\right)$, donc bien au dessus de la hauteur maximale de l'obstacle qui est de 10 mètres

En suivant cette trajectoire, le drone d'Alex ne rencontre donc pas l'obstacle.

Partie B

1. On a $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}0\\2\\0{,}5\end{pmatrix}$ donc $\overrightarrow{AM}=a\overrightarrow{AB}=\begin{pmatrix}0\\2a\\0{,}5a\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{CD}=\begin{pmatrix}-2\\0\\0\end{pmatrix}$ donc $\overrightarrow{CN}=b\overrightarrow{CD}=\begin{pmatrix}-2b\\0\\0\end{pmatrix}$

Donc $\overrightarrow{MN}=\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{CN}=\begin{pmatrix}0\\-2a\\-0{,}5a\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}2\\2\\0\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}-2b\\0\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\mathbf{2-2b}\\\mathbf{2-2a}\\\mathbf{-0,5a}\end{pmatrix}$ CQFD

2. Si $(MN)\perp(AB)$ alors $\overrightarrow{MN}.\overrightarrow{AB}=0 \Leftrightarrow 0\times(2-2b)+2\times(2-2a)+0{,}5\times(-0{,}5a)=0$

$$\Leftrightarrow -0{,}25a-4a+4=0 \Leftrightarrow a=\frac{4}{4{,}25}=\mathbf{\frac{16}{17}}$$

Et, si $(MN)\perp(CD)$ alors $\overrightarrow{MN}.\overrightarrow{CD}=0 \Leftrightarrow -2\times(2-2b)+0+0=0 \Leftrightarrow -2(2-2b)=0$

$$\Leftrightarrow 2-2b=0 \Leftrightarrow \boldsymbol{b}=\mathbf{1}$$

La distance MN est bien minimale **lorsque $\boldsymbol{a}=\mathbf{\frac{16}{17}}$ et $\boldsymbol{b}=\mathbf{1}$.**

3. On a alors $\overrightarrow{MN}\begin{pmatrix}2-2\\2-2\times\frac{16}{17}\\-0{,}5\times\frac{16}{17}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\\frac{2}{17}\\-\frac{8}{17}\end{pmatrix}$

Donc $MN=\sqrt{0^2+\left(\frac{2}{17}\right)^2+\left(-\frac{8}{17}\right)^2}=\sqrt{\frac{4}{17^2}+\frac{64}{17^2}}=\mathbf{\frac{\sqrt{68}}{17}}=\frac{2\sqrt{17}}{17}=\frac{2}{\sqrt{17}}\simeq 0{,}485$

La distance minimale entre les deux drones est d'environ 4, 85 mètres, ce qui est bien supérieur aux 4 mètres requis : **la consigne est respectée**

Corrigé Exercice 2

Partie A

1. Voir l'arbre de probabilités ci-contre.

2. On a : $P(I_2)=p(S_1\cap I_2)+p(M_1\cap I_2)+p(I_1\cap I_2)$

$$=P(S_1)P_{S_1}(I_2)+P(M_1)P_{M_1}(I_2)+P(I_1)P_{I_1}(I_2)$$

$$=0{,}85\times0{,}1+0{,}05\times0{,}35+0{,}1\times1=\mathbf{0,2025}$$

3. On cherche ici : $P_{I_2}(M_1)=\frac{P(M_1\cap I_2)}{P(I_2)}=\frac{0{,}05\times0{,}35}{0{,}2025}\simeq 0{,}086$. **Sachant qu'un individu est immunisé en semaine 2, il y a donc environs 8,6% de chances qu'il ait été malade en semaine 1.**

Partie B

1. A chaque semaine n, un individu est soit de type S, de type M ou de type I.
Les événements S_n, M_n et I_n forment donc une partition de l'univers considéré.
On a donc : $P(S_n)+P(M_n)+P(I_n)=1$ Ce qui revient à : $u_n+v_n+w_n=1$ CQFD

2. a. Il faut entrer la formule : =0,65*C2+0,05*B2

b. D'après la feuille de calcul, la valeur maximale de v_n est atteinte pour $n=4$, qui est donc la valeur du pic épidémique.

3. a. D'après l'énoncé, les seuls individus de type S à la semaine $n+1$ représentent 85% de ceux qui étaient de type S à la semaine précédente (la semaine n).
Donc en effet, pour tout entier naturel n, on a : $u_{n+1}=0{,}85u_n$. (u_n) est une suite géométrique.
On a donc : $u_n=1\times0{,}85^n=0{,}85^n$.

b. **Initialisation** : Pour $n = 0$, on a $v_0 = 0$ et $\frac{1}{4}(0{,}85^0 - 0{,}65^0) = \frac{1}{4}(1-1) = 0$.
On a donc effectivement $v_0 = \frac{1}{4}(0{,}85^0 - 0{,}65^0)$. La propriété est vraie pour $n = 0$
Hypothèse de récurrence : Supposons qu'il existe un entier $p \geq 0$, tel qu'on ait : $v_p = \frac{1}{4}(0{,}85^p - 0{,}65^p)$.
Hérédité :

On a:

D'une part :

$$\begin{aligned} v_{p+1} &= 0{,}65 v_p + 0{,}05 u_p \\ &= 0{,}65 \times \frac{1}{4}(0{,}85^p - 0{,}65^p) + 0{,}05 \times 0{,}85^p \\ &= 0{,}1625 \times 0{,}85^p - 0{,}1625 \times 0{,}65^p + 0{,}05 \times 0{,}85^p \\ &= 0{,}2125 \times 0{,}85^p - 0{,}1625 \times 0{,}65^p \end{aligned}$$

D'autre part :

$$\begin{aligned} &\frac{1}{4}(0{,}85^{p+1} - 0{,}65^{p+1}) \\ &= 0{,}25 \times 0{,}85 \times 0{,}85^p - 0{,}25 \times 0{,}65 \times 0{,}65^p \\ &= 0{,}2125 \times 0{,}85^p - 0{,}1625 \times 0{,}65^p \end{aligned}$$

On a donc effectivement : $v_{p+1} = \frac{1}{4}(0{,}85^{p+1} - 0{,}65^{p+1})$ La propriété est vraie aussi au rang $p + 1$.

Conclusion : Pour tout n, on a donc : $v_n = \frac{1}{4}(0{,}85^n - 0{,}65^n)$

Corrigé Exercice 3

1. Réponse **B** On a $\lim\limits_{n\to+\infty} \left(\frac{1}{4}\right)^n = 0$ car $-1 < \frac{1}{4} < 1$ alors $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 1$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = 1$
Comme $u_n \leq w_n \leq v_n$, d'après le théorème des gendarmes, on a bien $\lim\limits_{n\to+\infty} w_n = 1$

2. Réponse **C** $f'(x) = 1e^{x^2} + x\left(2xe^{x^2}\right) = (1+2x^2)e^{x^2}$

3. Réponse **C** On a $\frac{x^2-1}{2x^2-2x+1} = \frac{x^2\left(1-\frac{1}{x^2}\right)}{x^2\left(2-\frac{2}{x}+\frac{1}{x^2}\right)} = \frac{1-\frac{1}{x^2}}{2-\frac{2}{x}+\frac{1}{x^2}}$ or $\lim\limits_{x\to+\infty} 1 - \frac{1}{x^2} = 1$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} 2 - \frac{2}{x} + \frac{1}{x^2} = 2$
Donc par quotient de limites $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{x^2-1}{2x^2-2x+1} = \frac{1}{2}$

4. Réponse **C** $h(0) > 1 > h(1)$, comme la fonction est continue, le TVi permet de savoir que l'équation $h(x) = 1$ a au moins une solution dans $[0; 1]$.
Attention, on ne connait pas le sens de variation de h, donc on ne peut pas avoir unicité de la solution.

5. Réponse **C** La fonction g' est croissante sur $[1; 2]$, donc g'' y est positive, et g convexe
(il s'agit d'un maximum en 0 pour la réponse D)

Corrigé Exercice 4

On considère la fonction f définie sur $[0\,;\,+\infty[$ par

$$f(x) = \ln\left(\frac{3x+1}{x+1}\right)$$

On admet que la fonction f est dérivable sur $[0\,;\,+\infty[$ et on note f' sa fonction dérivée.
On note $\mathcal{C}_f$ la courbe représentative de la fonction f dans un repère orthogonal.

Partie A

1. On a $\frac{3x+1}{x+1} = \frac{x\left(3+\frac{1}{x}\right)}{x\left(1+\frac{1}{x}\right)} = \frac{3+\frac{1}{x}}{1+\frac{1}{x}}$

avec $\lim\limits_{x\to+\infty} 3 + \frac{1}{x} = 3$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} 1 + \frac{1}{x} = 1$, on a par quotient de limites $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{3x+1}{x+1} = 3$

Or $\lim\limits_{u\to 3}\ln(x) = \ln 3$ Donc par composée de limites, on a $\boldsymbol{\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \ln 3}$

La droite d'équation $\boldsymbol{y = \ln 3}$ est asymptote à $\boldsymbol{\mathcal{C}_f}$ en $+\infty$

2. a. On pose $u(x) = \frac{3x+1}{x+1}$ alors $u'(x) = \frac{3(x+1)-1(3x+1)}{(x+1)^2} = \frac{2}{(x+1)^2}$

Et donc $f'(x) = \frac{u'(x)}{u(x)} = \frac{\frac{2}{(x+1)^2}}{\frac{3x+1}{x+1}} = \frac{2}{(x+1)^2} \times \frac{x+1}{3x+1} = \frac{2}{(x+1)(3x+1)}$ CQFD

b.

x	0 $+\infty$
$x+1$	$+$
$3x+1$	$+$
$f'(x)$	$+$
$f(x)$	0 $\nearrow$ $\ln 3$

Partie B

1. **<u>Initialisation</u>** : Pour $n = 0$, on a $u_0 = 3$ et $u_1 = \ln\left(\frac{3\times3+1}{3+1}\right) = \ln\left(\frac{10}{4}\right) \simeq 0{,}9$

On a donc $\frac{1}{2} \leq u_1 \leq u_0$: la propriété est vraie au rang 0

<u>Hypothèse de récurrence</u> : On suppose qu'il existe un entier p quelconque tel que $\frac{1}{2} \leq u_{p+1} \leq u_p$

<u>Hérédité</u> : Comme f est strictement croissante, on a alors $f\left(\frac{1}{2}\right) \leq f\left(u_{p+1}\right) \leq f\left(u_p\right)$

Avec $f\left(\frac{1}{2}\right) = \ln\left(\frac{\frac{3}{2}+1}{\frac{1}{2}+1}\right) = \ln\left(\frac{5}{3}\right) \simeq 0{,}510 > \frac{1}{2}$

Donc par élargissement de l'inégalité, on obtient : $\frac{1}{2} \leq f\left(u_{p+1}\right) \leq f\left(u_p\right) \;\Rightarrow\; \frac{1}{2} \leq u_{p+2} \leq u_{p+1}$

La propriété est alors vraie au rang $p+1$

<u>Conclusion</u> : On a bien, pour tout entier naturel n, $\frac{1}{2} \leq u_{n+1} \leq u_n$.

2. On vient de montrer que la suite (u_n) est décroissante et minorée par $\frac{1}{2}$: d'après le théorème des suites monotones bornées, elle **converge vers une limite finie.**

On sait que $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n \geq \frac{1}{2}$ donc la limite est bien **strictement positive.**

Partie C

1. Sur $]0; x_0]$, on a $g(x) > 0$: il n'y a pas de solution sur cet intervalle.

Sur $\boldsymbol{[x_0;\ +\infty[}$, la fonction est continue et strictement décroissante, et $0 \in]-\infty; g(x_0)]$: d'après le théorème des valeurs intermédiaires, l'équation $g(x) = 0$ y admet une **unique solution $\boldsymbol{\alpha}$**

2. a. $\Rightarrow$

```
x = 0,22
While  g(x) > 0 :
        x = x + 0,01
Return x
```

b. L'algorithme renvoie la valeur $\mathbf{0,53}$

3. $g(\alpha) = 0 \;\Leftrightarrow\; f(\alpha) - \alpha = 0 \;\Leftrightarrow\; f(\alpha) = \alpha \;\Rightarrow$ Il s'agit donc de la limite ℓ recherchée. On a $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n \simeq 0{,}53$