

Sujet n°3 : Que des vrai/faux !

Pour chacune des affirmations proposées, indiquer si elle est vraie ou fausse. Chaque réponse doit être justifiée. Une réponse non justifiée ne rapporte aucun point.

Exercice 1 - Amérique du nord 2025

L'espace est rapporté à un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$.

On considère la droite (d) dont une représentation paramétrique est :

$$d : \begin{cases} x = 3 - 2t \\ y = -1 \\ z = 2 - 6t \end{cases}, \text{ où } t \in \mathbb{R}$$

On considère également les points suivants :

- $A(3; -3; -2)$ et $B(5; -4; -1)$
- C le point de la droite (d) d'abscisse 2
- H le projeté orthogonal du point B sur le plan $\mathcal{P}$ d'équation $x + 3z - 7 = 0$

Affirmation 1

La droite (d) et l'axe des ordonnées sont deux droites non coplanaires.

Affirmation 2

Le plan passant par A et orthogonal à la droite (d) a pour équation cartésienne : $x + 3z + 3 = 0$.

Affirmation 3

Une mesure, exprimée en radian, de l'angle géométrique $\widehat{BAC}$ est $\frac{\pi}{6}$.

Affirmation 4

La distance BH est égale à $\frac{\sqrt{10}}{2}$.

Exercice 2 - Polynésie 2025

Affirmation 1

Soit (v_n) la suite définie pour tout entier naturel n par :

$$v_n = \frac{n}{2 + \cos(n)}$$

La suite (v_n) diverge vers $+\infty$.

Affirmation 2

Dans l'espace rapporté à un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$, on considère les points $A(1; 1; 2)$, $B(5; -1; 8)$ et $C(2; 1; 3)$.

$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = 10$ et une mesure de l'angle $\widehat{BAC}$ est 30° .

Affirmation 3

On considère une fonction h définie sur $]0; +\infty]$ dont la dérivée seconde est définie sur $]0; +\infty]$ par :

$$h''(x) = x \ln x - 3x$$

La fonction h est convexe sur $[e^3; +\infty[$.

Exercice 3 - Métropole 2025

Affirmation 1

On définit la suite (u_n) pour tout entier naturel n par :

$$u_n = \frac{1 + 5^n}{2 + 3^n}$$

La suite (u_n) converge vers $\frac{5}{3}$.

Affirmation 2

On considère la suite (w_n) définie par $w_0 = 0$ et, pour tout entier naturel n , $w_{n+1} = 3w_n - 2n + 3$.
Pour tout entier naturel n , on a $w_n \geq n$.

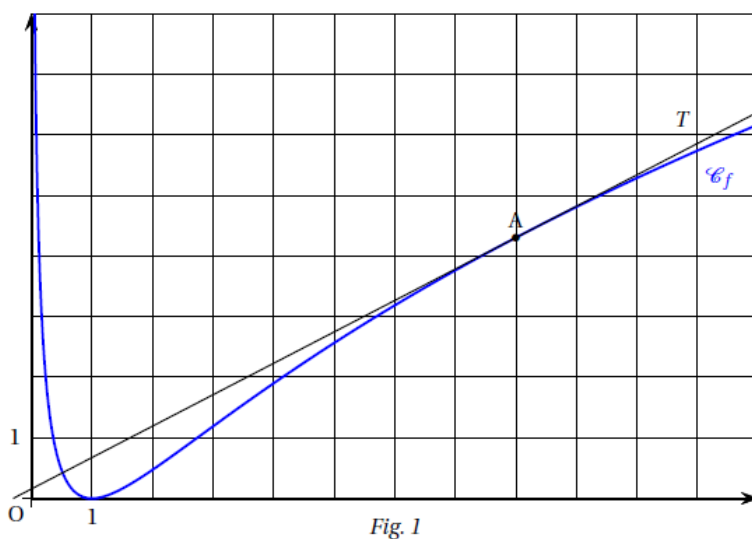
Affirmation 3

On considère la fonction f définie sur $]0; +\infty[$ dont la courbe représentative $\mathcal{C}_f$ est donnée dans un repère orthonormé sur la figure (Fig. 1) ci-contre.

On précise que :

- T est la tangente à $\mathcal{C}_f$ au point A d'abscisse 8 ;
- L'axe des abscisses est la tangente horizontale à $\mathcal{C}_f$ au point d'abscisse 1.

D'après ce graphique, la fonction f est convexe sur son ensemble de définition.



Affirmation 4

Pour tout réel $x > 0$, $\ln(x) - x + 1 \leq 0$, où $\ln$ désigne la fonction logarithme népérien.

Exercice 4 - Métropole 2025

Un musée propose des visites avec ou sans audioguide. Les billets peuvent être achetés en ligne ou directement au guichet.

Une étude a permis de considérer que :

- la probabilité qu'une personne choisisse l'audioguide sachant qu'elle a acheté son billet en ligne est égale à 0,8 ;
- la probabilité qu'une personne achète son billet en ligne est égale à 0,7 ;
- la probabilité qu'une personne opte pour une visite sans audioguide est égale à 0,32.

Affirmation 1

La probabilité qu'un visiteur ne prenne pas l'audioguide sachant qu'il a acheté son billet au guichet est supérieure à deux tiers.

Affirmation 2

On choisit au hasard 12 visiteurs de ce musée.

On suppose que le choix de l'option « audioguide » est indépendant d'un visiteur à l'autre.

La probabilité qu'exactement la moitié de ces visiteurs opte pour l'audioguide est égale à $924 \times 0,2176^6$.

Affirmation 3

Dans ce musée, lorsqu'une personne dispose d'un audioguide, elle peut choisir parmi trois parcours :

- un premier d'une durée de cinquante minutes,
- un deuxième d'une durée d'une heure et vingt minutes,
- un troisième d'une durée d'une heure et quarante minutes.

On considère que le temps de parcours peut être modélisé par une variable aléatoire X dont la loi de probabilité est donnée ci-dessous :

x_i	50 min	1 h 20 min	1 h 40 min
$P(X = x_i)$	0,1	0,6	0,3

L'espérance de X est 77 minutes.