Corrections Savoir Pb.1

Corrigé Exercice 1

$p(C)$ est la probabilité que le malade soit contagieux.
$A \cap C$ est l'événement : « Le malade choisi a plus de 60 ans **et** est contagieux ».
$\bar{A} \cup C$ est l'événement : « Le malade choisi a moins de 60 ans **ou** est contagieux ».
$p_A(C)$ est la probabilité que le malade soit contagieux **sachant qu'il a plus de 60 ans**.
$p(\bar{C} \cap A)$ est la probabilité que le malade ne soit pas contagieux et ait plus de 60 ans.
$p_{\bar{C}}(A)$ est la probabilité que le malade ait plus de 60 ans sachant qu'il n'est pas contagieux.
$\bar{A}$ est l'événement : « Le malade choisi a moins de 60 ans ».

Corrigé Exercice 2

1) $p(U \cap Z) = 7\%$ (dans le tableau) $p_V(Z) = 40\%$ (dans l'arbre) $p_U(\bar{Z}) = 100\% - 70\% = 30\%$ (dans l'arbre)

$p(V \cap \bar{Z}) = 54\%$ (dans le tableau) $p(U) = 7\% + 3\% = 10\%$ (dans le tableau) $p(\bar{Z}) = 3\% + 54\% = 57\%$ (dans le tableau)

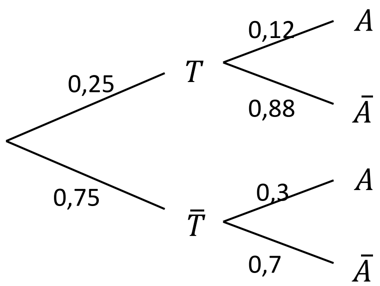
2) a) $p(D \cap T) = 0{,}56$ (dans le tableau). b) $p(T) = 0{,}59$ (dans le tableau).

c) $p_{\bar{D}}(\bar{T}) = 0{,}9$ (dans l'arbre). d) $p(T \cap \bar{D}) = 0{,}03$ (dans le tableau).

e) $p_D(\bar{T}) = 0{,}2$ (dans l'arbre). f) $p_D(T) = 0{,}8$ (dans l'arbre).

g) Dans le tableau, on a : $p(D \cup T) = 0{,}56 + 0{,}03 + 0{,}14 = 0{,}73$
ou alors $0{,}7 + 0{,}03$ ou encore $0{,}59 + 0{,}14$ ou même $1 - 0{,}27$ ou $0{,}7 + 0{,}59 - 0{,}56$

3) CONSEIL : Commencer par compléter l'arbre ainsi que le tableau en s'aidant des TOTAUX

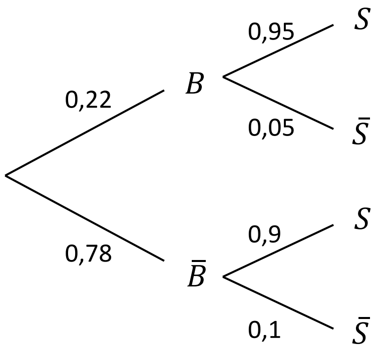


	A	$\bar{A}$	Total
T	0,03	0,22	**0,25**
$\bar{T}$	0,225	0,525	**0,75**
Total	0,255	0,745	**1**

a) $p(T) = 0{,}25$ (dans l'arbre).
b) $p(T \cap A) = 0{,}03$ (dans le tableau).
c) $p_T(\bar{A}) = 1 - 0{,}12 = 0{,}88$ (dans l'arbre).
d) $p(A \cap \bar{T}) = 0{,}75 - 0{,}525$ (0,75 dans le tableau et 0,525 dans l'arbre !) $\Rightarrow p(A \cap \bar{T}) = 0{,}225$.
e) $p_{\bar{T}}(\bar{A}) = 0{,}7$ (dans l'arbre).
f) $p(T \cap \bar{A}) = 0{,}25 - 0{,}03$ (0,25 dans l'arbre et 0,03 dans le tableau) $\Rightarrow p(T \cap \bar{A}) = 0{,}22$.
g) $p(A) = 0{,}03 + 0{,}225$ (dans le tableau, grâce à la question d) $\Rightarrow p(A) = 0{,}255$.
h) $p(A \cup \bar{T}) = 0{,}75 + 0{,}255 - 0{,}225$ (dans le tableau complété, grâce à la question d) $\Rightarrow p(A \cup \bar{T}) = 0{,}78$.
i) $p_{\bar{T}}(A) = 1 - 0{,}7 = 0{,}3$ (dans l'arbre).

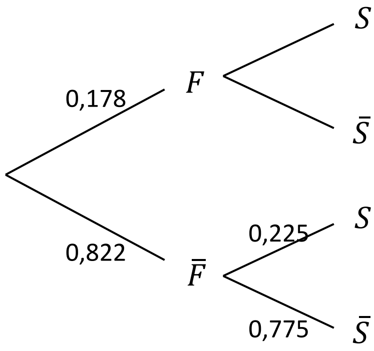
Corrigé Exercice 3

1)



2) a) $p(S) = 0{,}203$
et $p_{\bar{F}}(S) = 0{,}225$.

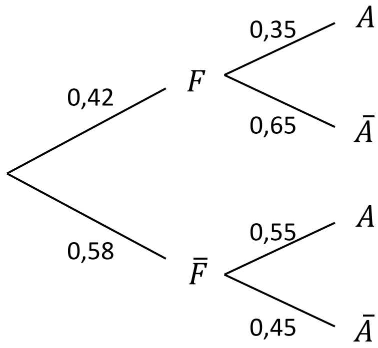
b)



3) On définit les événements suivants :

- F : « La personne est une femme »
- A : « La personne effectue un achat »

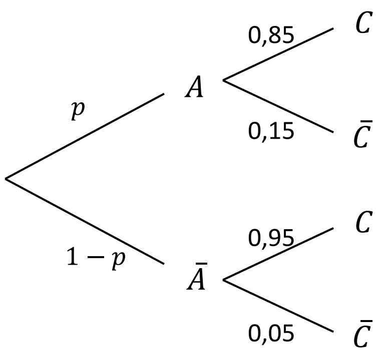
On obtient alors l'arbre suivant.



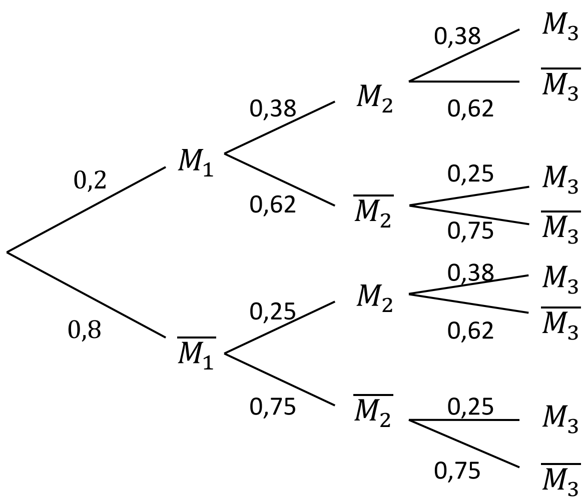
4) On définit les événements suivants :

- A : « La pomme provient du fournisseur A »
- C : « La pomme est commercialisable »

On obtient alors l'arbre suivant.



5) On définit l'événement :
M_n par : « La bactérie est atteinte par la mutation au jour n ».



Corrigé Exercice 4

1) a)

	A	B	C	Total
S	0,1	0,2	0,3	0,6
$\bar{S}$	0,25	0,1	0,05	0,4
Total	0,35	0,3	0,35	1

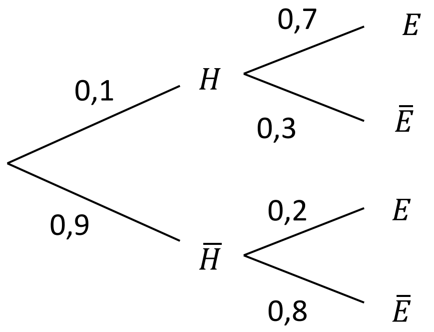
b) $p_S(B) = \frac{p(S \cap B)}{p(S)} = \frac{0{,}2}{0{,}6} \simeq \mathbf{0{,}33}$

$p_{\bar{S}}(A) = \frac{p(\bar{S} \cap A)}{p(\bar{S})} = \frac{0{,}25}{0{,}4} = \mathbf{0{,}625}$

$p_A(S) = \frac{p(S \cap A)}{p(A)} = \frac{0{,}1}{0{,}35} \simeq \mathbf{0{,}29}$

$p_C(\bar{S}) = \frac{p(\bar{S} \cap C)}{p(C)} = \frac{0{,}05}{0{,}35} \simeq \mathbf{0{,}14}$

2) a)



b) $p(H \cap E) = p(H) \times p_H(E) = 0{,}1 \times 0{,}7 = \mathbf{0,07}$

$p(H \cap \bar{E}) = p(H) \times p_H(\bar{E}) = 0{,}1 \times 0{,}3 = \mathbf{0,03}$

Ou $p(H \cap \bar{E}) = p(H) - p(H \cap E) = 0{,}1 - 0{,}07 = \mathbf{0,03}$

c) $p(E) = p(H \cap E) + p(\bar{H} \cap E) = 0{,}07 + 0{,}18 = \mathbf{0,25}$

et $p(\bar{E}) = 1 - p(E) = 0{,}75$

$p(\bar{H} \cap E) = p(\bar{H}) \times p_{\bar{H}}(E) = 0{,}9 \times 0{,}2 = \mathbf{0,18}$

$p(\bar{H} \cap \bar{E}) = p(\bar{H}) \times p_{\bar{H}}(\bar{E}) = 0{,}9 \times 0{,}8 = \mathbf{0,72}$

Ou $p(\bar{H} \cap \bar{E}) = p(\bar{H}) - p(\bar{H} \cap E) = 0{,}9 - 0{,}18 = \mathbf{0,72}$

d) $p_E(H) = \frac{p(H \cap E)}{p(E)} = \frac{0{,}07}{0{,}25} = \mathbf{0,28}$

et $p_E(\bar{H}) = 1 - p_E(H) = 1 - 0{,}28 = \mathbf{0,72}$

$p_{\bar{E}}(H) = \frac{p(H \cap \bar{E})}{p(\bar{E})} = \frac{0{,}03}{0{,}75} = \mathbf{0,04}$

et $p_{\bar{E}}(\bar{H}) = 1 - p_{\bar{E}}(H) = 1 - 0{,}04 = \mathbf{0,96}$

3) a) $p(B) = p(A_1 \cap B) + p(A_2 \cap B) + p(A_3 \cap B)$

$= p(A_1) \times p_{A_1}(B) + p(A_2) \times p_{A_2}(B) + p(A_3) \times p_{A_3}(B)$

$= 0{,}5 \times 0{,}2 + 0{,}1 \times 0{,}4 + 0{,}4 \times 0{,}7$

$= 0{,}1 + 0{,}04 + 0{,}28 = \mathbf{0,42}$ et $p(\bar{B}) = 1 - p(B) = \mathbf{0,58}$

b) $p_B(A_2) = \frac{p(A_2 \cap B)}{p(B)} = \frac{0{,}04}{0{,}42} \simeq \mathbf{0,095}$ $\quad p_B(A_3) = \frac{p(A_3 \cap B)}{p(B)} = \frac{0{,}28}{0{,}42} \simeq \mathbf{0,67}$

$p_{\bar{B}}(A_1) = \frac{p(A_1 \cap \bar{B})}{p(\bar{B})} = \frac{0{,}5 \times 0{,}8}{0{,}58} = \frac{0{,}4}{0{,}58} \simeq \mathbf{0,69}$

4) Il faut d'abord calculer $p(U) = p(R \cap U) + p(\bar{R} \cap U) = p(R) \times p_R(U) + p(\bar{R}) \times p_{\bar{R}}(U)$

$= 0{,}4 \times 0{,}25 + 0{,}6 \times 0{,}7 = 0{,}1 + 0{,}42 = \mathbf{0,52}$

Puis $p_U(\bar{R}) = \frac{p(\bar{R} \cap U)}{p(U)} = \frac{0{,}42}{0{,}52} \simeq \mathbf{0,808}$ $\quad$ Et $p_{\bar{U}}(R) = \frac{p(R \cap \bar{U})}{p(\bar{U})} = \frac{0{,}4 \times 0{,}75}{1 - 0{,}52} = \frac{0{,}3}{0{,}48} = \mathbf{0,625}$

Corrigé Exercice 5

1) a) $p(A \cap B) = p(A) \times p_A(B) = \mathbf{0,6p}$

b) $p(B) = p(A \cap B) + p(\bar{A} \cap B) = \mathbf{0,6p + 0,08}$

c) On sait que $p(B) = 0{,}53$

donc $0{,}6p + 0{,}08 = 0{,}53 \Leftrightarrow p = \frac{0{,}53 - 0{,}08}{0{,}6} = 0{,}75$

$p_A(B) = \mathbf{0,75}$ et $p_A(\bar{B}) = 1 - p_A(B) = \mathbf{0,25}$

2) a) $p(\bar{S}) = p(M \cap \bar{S}) + p(\bar{M} \cap \bar{S})$

$= p(M) \times p_M(\bar{S}) + p(\bar{M}) \times p_M(\bar{S})$

$= \mathbf{0,84p + 0,8(1 - p)}$

Et on sait que $p(\bar{S}) = 0{,}83$ donc on a bien :

$0{,}84x + 0{,}8(1 - x) = 0{,}83$

b) $0{,}84x + 0{,}8(1 - x) = 0{,}83$

$\Leftrightarrow 0{,}04p = 0{,}83 - 0{,}8 \Leftrightarrow p = \frac{0{,}03}{0{,}04} = \mathbf{0,75}$

$p(M) = \mathbf{0,75}$ et $p(\bar{M}) = 1 - 0{,}75 = \mathbf{0,25}$

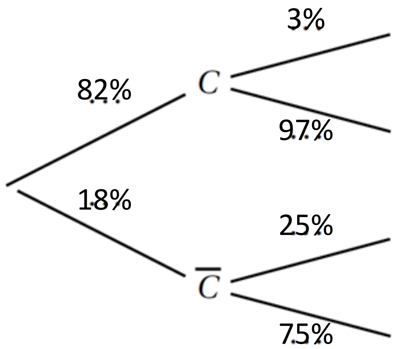
3) a) $p(X_1 \cap Y) = p(X_1) \times p_{X_1}(Y) = 0{,}1 \times 0{,}4 = \mathbf{0,04}$

b) $p(X_2 \cap Y) = p(Y) - p(X_1 \cap Y) = 0{,}31 - 0{,}04 = \mathbf{0,27}$

c) $p_{X_2}(Y) = \frac{p(X_2 \cap Y)}{p(X_2)} = \frac{0{,}27}{0{,}9} = \mathbf{0,3}$ et $p_{X_2}(\bar{Y}) = 1 - p_{X_2}(Y) = \mathbf{0,7}$

Corrigé Exercice 6

On s'aidera avantageusement d'un arbre comme ci-dessous.



a) $p(C) = \mathbf{82}\%$.

b) $C \cap I$ est l'événement « **la personne a effectué une scolarité complète au collège et est en situation d'illettrisme** ».

$p(C \cap I) = 0{,}82 \times 0{,}03 = \mathbf{2{,}46}\%.$

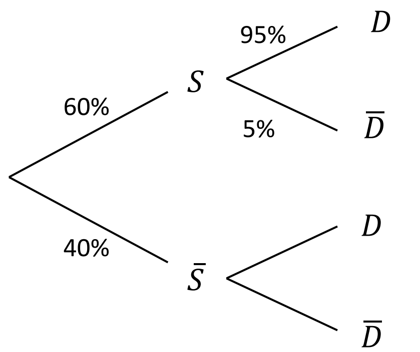
c) $p(I) = p(C \cap I) + p(\bar{C} \cap I) = 0{,}0246 + 0{,}045 = \mathbf{6{,}96}\%$

d) $p(C \cup I) = p(\mathrm{C}) + p(I) - p(\mathrm{C} \cap I) = 0{,}82 + 0{,}0696 - 0{,}0246 = \mathbf{86{,}5}\%$

e) L'affirmation correspond à $p_I(\bar{C})$.
Or $p_I(\bar{C}) = \frac{p(I \cap \bar{C})}{p(I)} = \frac{0{,}045}{0{,}0696} \simeq 0{,}65 \simeq \mathbf{\frac{2}{3}}$.   (Car $\frac{2}{3} \simeq 0{,}67$)
Le journaliste a donc plutôt raison.

Corrigé Exercice 7

Un arbre est très utile :



1. L'énoncé donne : $p(S) = 0{,}6$; $p_S(D) = 0{,}95$ et $p(D) = 0{,}586$.
On a donc $P(S \cap D) = p(S) \times p_S(D) = 0{,}6 \times 0{,}95 = \mathbf{0{,}57}$.

2. On cherche ici $p_{\bar{S}}(D) = \frac{p(\bar{S} \cap D)}{p(\bar{S})}$.
Or $p(\bar{S} \cap D) = p(D) - p(S \cap D) = 0{,}586 - 0{,}57 = 0{,}016$.
D'autre part, $p(\bar{S}) = 1 - p(S) = 0{,}4$. On a donc $p_{\bar{S}}(D) = \frac{0{,}016}{0{,}4} = \mathbf{0{,}04}$.
CQFD.

3. On cherche ici $p_{\overline{D}}(S) = \frac{p(\overline{D} \cap S)}{p(\overline{D})}$.
Or $p(\overline{D} \cap S) = p(S) - p(D \cap S) = 0{,}6 - 0{,}57 = 0{,}03$.
D'autre part, $p(\overline{D}) = 1 - p(D) = 0{,}414$.   On a donc : $p_{\overline{D}}(S) = \frac{0{,}03}{0{,}414} \simeq \mathbf{0{,}072}$.
Si on choisit au hasard un message non déplacé, il y a donc environ 7,2% de chances que ce message soit un spam.