# Corrigés Savoir Df. 2

## Corrigé Exercice 4

**1) a.** Pour $-x^2+3x+4$ on a $\Delta = 25$ ; $x_1 = -1$ et $x_2 = 4$
Donc

| $x$ | $-\infty$ | | $-1$ | | $0$ | | $4$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $-4x$ | | $+$ | $\vert$ | $+$ | $0$ | $-$ | $\vert$ | $-$ | |
| $-x^2+3x+4$ | | $-$ | $0$ | $+$ | $\vert$ | $+$ | $0$ | $-$ | |
| $f'(x)$ | | $-$ | $\mathbf{0}$ | $+$ | $\mathbf{0}$ | $-$ | $\mathbf{0}$ | $+$ | |
| $f(x)$ | | $\searrow$ | $2$ | $\nearrow$ | $5$ | $\searrow$ | $-123$ | $\nearrow$ | |

**b & c**. Voir dernière ligne du tableau précédent
On calcule avec $f$ : par exemple $f(0) = 0^4 - 4\times 0^3 - 8\times 0^2 + 5 = 5$
On peut aussi utiliser le tableur de la calculatrice, attention à bien rentrer $f(x) = x^4 - 4x^3 - 8x^2 + 5$ et non la dérivée

**2) a.** Pour $x^2 + x - 2$ on a $\Delta = 9$ ; $x_1 = -2$ et $x_2 = 1$
Donc

| $x$ | $-3$ | | $-2$ | | $1$ | | $2$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $x^2+x-2$ | | $+$ | $0$ | $-$ | $0$ | $+$ | |
| $e^{x+1}$ | | $+$ | $\vert$ | $+$ | $\vert$ | $+$ | |
| $g'(x)$ | | $+$ | $\mathbf{0}$ | $-$ | $\mathbf{0}$ | $+$ | |
| $g(x)$ | $\frac{11}{e^2}$ | $\nearrow$ | $\frac{5}{e}$ | $\searrow$ | $-e^2$ | $\nearrow$ | $e^3$ |

**b**. Voir dernière ligne du tableau ci-dessus.
En valeur exactes, puis approchées on a : $g(-3) = ((-3)^2 - (-3) - 1)e^{-3+1} = 11e^{-2} = \boldsymbol{\frac{11}{e^2}} \simeq \mathbf{1,5}$

$g(-2) = ((-2)^2 - (-2) - 1)e^{-2+1} = 5e^{-1} = \boldsymbol{\frac{5}{e}} \simeq \mathbf{1,8}$
$g(1) = (1^2 - 1 - 1)e^{1+1} = \boldsymbol{-e^2} \simeq \mathbf{-7,4}$ **et** $g(2) = (2^2 - 2 - 1)e^{2+1} = \boldsymbol{e^3} \simeq \mathbf{273}$

**c.** D'après les valeurs ci-dessus, le minimum de $g$ sur $[-3; 2]$ est $g(1) = -e^2$ et le maximum est $g(3) = e^3$
Donc : $\boldsymbol{-e^2 \leq g(x) \leq e^3}$

**3) a.** On a toujours $(x+1)^2 \geq 0$ et donc, par signe d'un quotient $h'(x) < 0$ (vous pouvez faire le tableau de signe si vous préférez).
La dérivée $h'$ est négative sur $[0; 2]$ donc la fonction $h$ y est décroissante.

**b**. On a avec $h(0) = 0$ et $h(2) = -\frac{2}{3}$

| $x$ | $0$ | | $2$ |
|---|---|---|---|
| $h(x)$ | $0$ | $\searrow$ | $-\frac{2}{3}$ |

Donc $\boldsymbol{-\frac{2}{3} \leq h(x) \leq 0}$

## Corrigé Exercice 5

**1.** On a $f(0) = 400 \times 1 + 40 = 440$. Il y avait 440 crapauds dans le lac lors de l'introduction des truites.
**2.**

| $t$ | $0$ | | $100$ | | $120$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $0{,}0008t$ | | $+$ | | $+$ | |
| $t-100$ | | $-$ | $0$ | $+$ | |
| $e^{\frac{t}{50}}$ | | $+$ | | $+$ | |
| $f'(t)$ | | **−** | **0** | **+** | |
| $f(t)$ | 440 | ↘ | 40 | ↗ | $\simeq 216{,}37$ |

**3. a.** Il faut 100 jours pour que le nombre de crapauds atteigne son minimum, donc $J = 100$.
Il y aura au minimum 40 crapauds.

**b.** Au bout de 120 jours il y aura 216 crapauds, donc le nombre de crapauds dépassera un jour 140 individus après avoir atteint son minimum.

**c.** On constate que $f(115) < 140 < f(116)$ donc c'est à partir de 116 jours qu'il y aura plus de 140 crapauds.

## Corrigé Exercice 6 **

**1. a**. $f(x) = g(x) \Leftrightarrow x^2e^{-x} = e^{-x} \Leftrightarrow (x^2-1)e^{-x} = 0 \Leftrightarrow x = -1 \ ou \ x = 1$
On a $g(-1) = e^{-(-1)} = e$ et $g(1) = e^{-1} = \frac{1}{e}$
Les points d'intersection de $\mathcal{C}_f$ et $\mathcal{C}_g$ ont pour coordonnées $(\boldsymbol{-1};\boldsymbol{e})$ **et** $\left(\boldsymbol{1};\boldsymbol{\frac{1}{e}}\right)$

**b.** $f(x) - g(x) = x^2e^{-x} - e^{-x} = (x^2-1\,)e^{-x}$
Donc

| $x$ | $0$ | | $-1$ | | $1$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $x^2-1$ | | $+$ | $0$ | $-$ | $0$ | $+$ | |
| $e^{-x}$ | | $+$ | \| | $+$ | \| | $+$ | |
| $f(x)-g(x)$ | | $+$ | $0$ | $-$ | $0$ | $+$ | |

Pour $x \in ]-\infty;\ -1] \cup [1;\ +\infty[$, on a $f(x) - g(x) \geq 0 \Leftrightarrow f(x) \geq g(x)$ donc $\boldsymbol{\mathcal{C}_f}$ **est au dessus de** $\boldsymbol{\mathcal{C}_g}$
Pour $x \in [-1; 1]$, on a $f(x) - g(x) \leq 0 \Leftrightarrow f(x) \leq g(x)$ donc $\boldsymbol{\mathcal{C}_f}$ **est en dessous de** $\boldsymbol{\mathcal{C}_g}$

**2. a.** Pour $x^2 - 2x - 1$, on a $\Delta = 8$ et $x_1 = \frac{2+\sqrt{8}}{2} = \frac{2+2\sqrt{2}}{2} = 1+\sqrt{2}$ et $x_2 = 1-\sqrt{2}$
alors

| $x$ | $-1$ | | $1-\sqrt{2}$ | | $1$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $x^2-2x-1$ | \| | $+$ | $0$ | $-$ | |
| $e^{-x}$ | \| | $+$ | \| | $+$ | |
| $d'(x)$ | \| | $+$ | $0$ | $-$ | |
| $d(x)$ | $0$ | ↗ | $(2\sqrt{2}-2)e^{-1+\sqrt{2}}$ | ↘ | $0$ |

Avec $d(-1) = e^1 - 1 \times e^1 = 0$ ; $d(1) = e^{-1} - 1 \times e^{-1} = 0$
et $d(1-\sqrt{2}) = e^{-1+\sqrt{2}} - (1-\sqrt{2})^2 e^{-1+\sqrt{2}} = (1-1+2\sqrt{2}-2)e^{-1+\sqrt{2}} = (2\sqrt{2}-2)e^{-1+\sqrt{2}}$

**b.** D'après le tableau de variation, la distance maximale est atteinte pour $x_0 = 1-\sqrt{2}$.
On a alors $d(x_0) = (2\sqrt{2}-2)e^{-1+\sqrt{2}}$ soit $M_0N_0 \simeq 1{,}3$