

Savoir Vps. 6 : Produit scalaire

Entraînement n°1

1) Dans un repère $(O; \vec{i}, \vec{j})$ on donne les vecteurs : $\vec{a}(\frac{5}{2}; -2)$, $\vec{b}(4; 5)$ et $\vec{c}(-3; 8)$. Calculer :

a. $\vec{a} \cdot \vec{b}$

b. $\vec{c}^2$

c. $\|\vec{a}\|$

d. $\vec{c} \cdot \vec{b}$

2) On se place dans une base $(\overrightarrow{AB}; \overrightarrow{AC})$. On donne les vecteurs : $\overrightarrow{AM} = 2\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AC}$ et $\overrightarrow{BP} = 3\overrightarrow{AC} - 5\overrightarrow{BC}$
Les vecteurs $\overrightarrow{AM}$ et $\overrightarrow{BP}$ sont-ils orthogonaux ? (Détaillez la démarche)

3) Le triangle TRI est isocèle en T . On appelle A le pied de la hauteur* issue de T .

Le point N est tel que $\overrightarrow{AN} = \overrightarrow{IR}$. On donne $TI = 13$; $IR = 10$ et $TA = 12$.

a. Quel est le projeté orthogonal de N sur (TA) ?

b. Calculer $\overrightarrow{TN} \cdot \overrightarrow{TA}$

c. Calculer $\overrightarrow{IT} \cdot \overrightarrow{NR}$

*On rappelle que dans un triangle isocèle, le pied de la hauteur issue du sommet principal est aussi le milieu du côté opposé, puisque médiane, médiatrice et hauteur sont confondues.

Entraînement n°2

1) Dans un repère $(O; \vec{i}, \vec{j})$ on donne les vecteurs : $\vec{u}(2; -3)$, $\vec{v}(-7; -5)$ et $\vec{w}(0; 6)$. Calculer :

a. $\vec{u} \cdot \vec{w}$

b. $\|\vec{v}\|$

c. $\vec{v} \cdot \vec{u}$

d. $\vec{u}^2$

2) On se place dans une base $(\overrightarrow{OA}; \overrightarrow{OC})$. On donne les vecteurs : $\vec{a} = \overrightarrow{AO} + 3\overrightarrow{OC}$ et $\vec{b} = 2\overrightarrow{OC} + \frac{3}{2}\overrightarrow{CA}$
Les vecteurs $\vec{a}$ et $\vec{b}$ sont-ils orthogonaux ? (Détaillez la démarche)

3) Soit un losange $LOSA$ de centre N et tel que $LO = 5$, $LS = 8$ et $AO = 6$.

a. Quel est le projeté orthogonal de O sur (LS) ?

b. Calculer $\overrightarrow{SO} \cdot \overrightarrow{LS}$

c. Calculer $\overrightarrow{AL} \cdot \overrightarrow{AN}$

Entraînement n°3

1) Dans un repère $(O; \vec{i}, \vec{j})$ on donne les vecteurs : $\vec{a}(-2; 1)$, $\vec{h}(3; -\frac{1}{2})$ et $\vec{v}(-2; -3)$. Calculer :

a. $\vec{a}^2$

b. $\vec{a} \cdot \vec{h}$

c. $\|\vec{v}\|$

d. $\vec{h} \cdot \vec{v}$

2) On se place dans une base $(\overrightarrow{EF}; \overrightarrow{FG})$. On donne les vecteurs : $\overrightarrow{EA} = -\frac{1}{2}\overrightarrow{EF} + 3\overrightarrow{EG}$ et $\overrightarrow{FB} = 2\overrightarrow{GF} + \frac{3}{2}\overrightarrow{EF}$
Les vecteurs $\overrightarrow{EA}$ et $\overrightarrow{FB}$ sont-ils orthogonaux ? (Détaillez la démarche)

3) Dans le triangle ABC , le point H est le pied de la hauteur issue de B . Dans le triangle AHB , le point K est le pied de la hauteur issue de H . On donne : $AK = 4$; $KB = 5$; $AH = 6$ et $HC = 3$

a. Quel est le projeté orthogonal de B sur (AC) ?

b. Calculer $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}$

c. Calculer $\overrightarrow{HA} \cdot \overrightarrow{KB}$

Savoir Vps. 6 : Corrections

Corrigé Entraînement n°1

1) a. $\vec{a} \cdot \vec{b} = \frac{5}{2} \times 4 + (-2) \times 5 = 10 - 10 = 0$

b. $\vec{c}^2 = (-3)^2 + 8^2 = 9 + 64 = 73$

c. $\|\vec{a}\| = \sqrt{\left(\frac{5}{2}\right)^2 + (-2)^2} = \sqrt{\frac{25}{4} + 4} = \sqrt{\frac{25+16}{4}} = \frac{1}{2}\sqrt{41}$

d. $\vec{c} \cdot \vec{b} = -12 + 40 = 28$

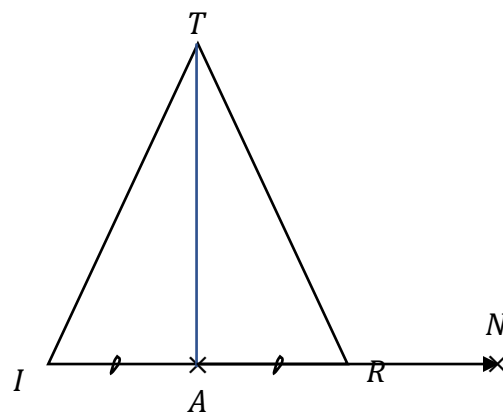
2) On a $\overrightarrow{AM} \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{BP} = 3\overrightarrow{AC} - 5\overrightarrow{BA} - 5\overrightarrow{AC} = 5\overrightarrow{AB} - 2\overrightarrow{AC} = \begin{pmatrix} 5 \\ -2 \end{pmatrix}$

Alors $\overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{BP} = 10 + 3 = 13 \neq 0$ donc les vecteurs $\overrightarrow{AM}$ et $\overrightarrow{BP}$ ne sont pas orthogonaux

3) a. Le projeté orthogonal de N sur (TA) est le point A

b. $\overrightarrow{TN} \cdot \overrightarrow{TA} = \overrightarrow{TA} \cdot \overrightarrow{TA} = TA^2 = 12^2 = 144$

c. $\overrightarrow{IT} \cdot \overrightarrow{NR} = \overrightarrow{IA} \cdot \overrightarrow{NR} = -IA \times NR = -\frac{10}{2} \times \frac{10}{2} = -25$



Corrigé Entraînement n°2

1) a. $\vec{u} \cdot \vec{w} = 2 \times 0 - 3 \times 6 = -18$

b. $\|\vec{v}\| = \sqrt{(-7)^2 + (-5)^2} = \sqrt{49 + 25} = \sqrt{74}$

c. $\vec{v} \cdot \vec{u} = -14 + 15 = 1$

d. $\vec{u}^2 = 2^2 + (-3)^2 = 4 + 9 = 13$

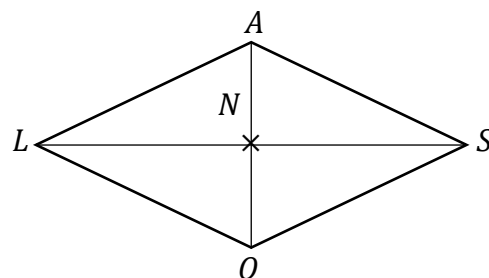
2) $\vec{a} = -\overrightarrow{OA} + 3\overrightarrow{OC} = \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \end{pmatrix}$ et $\vec{b} = 2\overrightarrow{OC} + \frac{3}{2}\overrightarrow{CO} + \frac{3}{2}\overrightarrow{OA} = \frac{3}{2}\overrightarrow{OA} + 2\overrightarrow{OC} - \frac{3}{2}\overrightarrow{OC} = \frac{3}{2}\overrightarrow{OA} + \frac{1}{2}\overrightarrow{OC} = \begin{pmatrix} \frac{3}{2} \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix}$

Alors $\vec{a} \cdot \vec{b} = -\frac{3}{2} + \frac{3}{2} = 0$ Les vecteurs $\vec{a}$ et $\vec{b}$ sont orthogonaux

3) a. Le projeté orthogonal de O sur (LS) est le point N (les losanges ont leurs diagonales perpendiculaires)

b. $\overrightarrow{SO} \cdot \overrightarrow{LS} = \overrightarrow{SN} \cdot \overrightarrow{LS} = -SN \times LS = -4 \times 8 = -32$
(Les diagonales se coupent en leur milieu...)

c. $\overrightarrow{AL} \cdot \overrightarrow{AN} = \overrightarrow{AN}^2 = AN^2 = 3^2 = 9$



Corrigé Entraînement n°3

1) a. $\vec{d}^2 = (-2)^2 + 1^2 = 5$

b. $\vec{d} \cdot \vec{h} = -6 - \frac{1}{2} = -\frac{13}{2}$

c. $\|\vec{v}\| = \sqrt{4+9} = \sqrt{13}$

d. $\vec{h} \cdot \vec{v} = -6 + \frac{3}{2} = -\frac{9}{2}$

2) On a $\vec{EA} = -\frac{1}{2}\vec{EF} + 3\vec{EF} + 3\vec{FG} = \frac{5}{2}\vec{EF} + 3\vec{FG} = \begin{pmatrix} \frac{5}{2} \\ \frac{3}{2} \end{pmatrix}$ et $\vec{FB} = \frac{3}{2}\vec{EF} - 2\vec{FG} = \begin{pmatrix} \frac{3}{2} \\ -2 \end{pmatrix}$

Alors $\vec{EA} \cdot \vec{FB} = \frac{15}{4} - 6 = -\frac{9}{4} \neq 0$

Les vecteurs $\vec{EA}$ et $\vec{FB}$ ne sont pas orthogonaux

3) a. Le projeté orthogonal de B sur (AC) est le point H

b. $\vec{AB} \cdot \vec{AC} = \vec{AH} \cdot \vec{AC} = AH \times AC = 6 \times (6+3) = 54$

c. $\vec{HA} \cdot \vec{KB} = \vec{KA} \cdot \vec{KB} = -KA \times KB = -4 \times 5 = -20$

