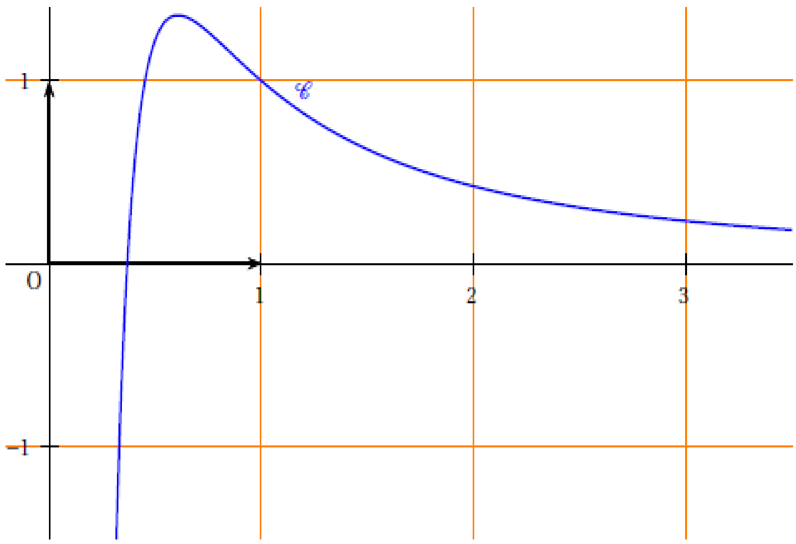
Entraînements Sujets BAC

1. Amérique du Nord - Ancien bac S

Soit f la fonction définie sur l'intervalle $]0\ ;\ +\infty[$ par :

$$f(x) = \frac{1+\ln(x)}{x^2}$$

et soit $\mathcal{C}$ la courbe représentative de la fonction f dans un repère du plan.
La courbe $\mathcal{C}$ est donnée ci-contre.



1. a. Étudier la limite de f en 0.

b. Que vaut

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\ln x}{x}\ ?$$

En déduire la limite de la fonction f en $+\infty$.

c. En déduire les asymptotes éventuelles à la courbe $\mathcal{C}$.

2. a. On note f' la fonction dérivée de la fonction f sur l'intervalle $]0\ ;\ +\infty[$.
Démontrer que, pour tout réel x appartenant à l'intervalle $]0\ ;\ +\infty[$

$$f'(x) = \frac{-1-2\ln(x)}{x^3}$$

b. Résoudre sur l'intervalle $]0\ ;\ +\infty[$ l'inéquation $-1-2\ln(x) > 0$.
En déduire le signe de $f'(x)$ sur l'intervalle $]0\ ;\ +\infty[$.

c. Dresser le tableau des variations de la fonction f .

3. a. Démontrer que la courbe $\mathcal{C}$ a un unique point d'intersection avec l'axe des abscisses, dont on précisera les coordonnées.

b. En déduire le signe de $f(x)$ sur l'intervalle $]0\ ;\ +\infty[$.

2. Liban - Ancien bac S

Étant donné un nombre réel k, on considère la fonction f_k définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f_k(x) = \frac{1}{1+e^{-kx}}$$

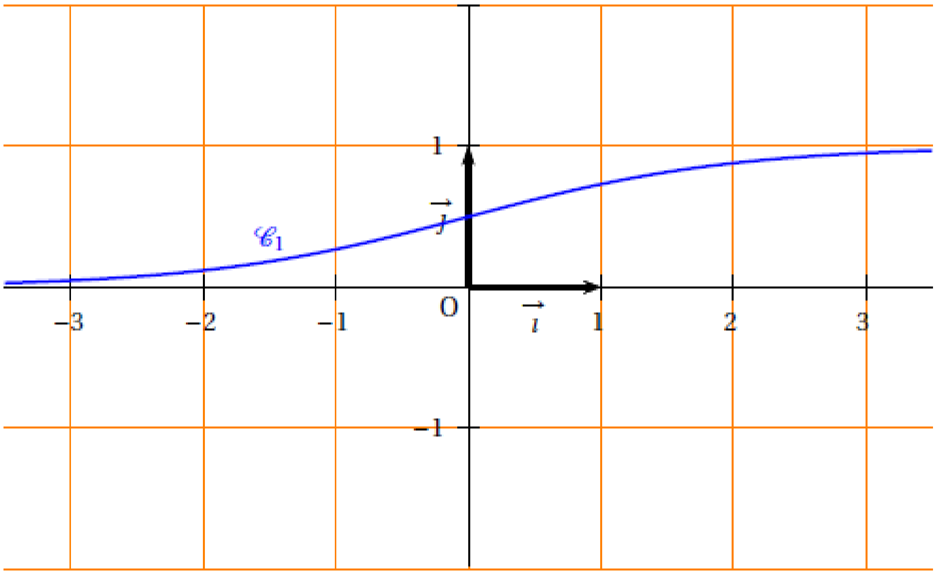
Le plan est muni d'un repère orthonormé $(O;\ \vec{\imath},\vec{\jmath})$.

Partie A

Dans cette partie on choisit $k = 1$.
On a donc, pour tout réel x,

$$f_1(x) = \frac{1}{1+e^{-x}}$$

La représentation graphique $\mathcal{C}_1$ de la fonction f_1 dans le repère $(O;\ \vec{\imath},\vec{\jmath})$ est donnée ci-contre



1. Déterminer les limites de $f_1(x)$ en $+\infty$ et en $-\infty$ et interpréter graphiquement les résultats obtenus.

2. Démontrer que, pour tout réel x,

$$f_1(x) = \frac{e^x}{1+e^x}$$

3. On appelle f_1' la fonction dérivée de f_1 sur $\mathbb{R}$. Calculer, pour tout réel x, $f_1'(x)$.
En déduire les variations de la fonction f_1 sur $\mathbb{R}$.

Partie B

Dans cette partie, on choisit $k = -1$ et on souhaite tracer la courbe $\mathcal{C}_{-1}$ représentant la fonction f_{-1}.
Pour tout réel x, on appelle P le point de $\mathcal{C}_1$ d'abscisse x et M le point de $\mathcal{C}_{-1}$ d'abscisse x.
On note K le milieu du segment $[MP]$.

1. Montrer que, pour tout réel x, $f_1(x) + f_{-1}(x) = 1$

2. En déduire que le point K appartient à la droite d'équation $y = \frac{1}{2}$

3. Tracer la courbe $\mathcal{C}_{-1}$ sur le graphique de la partie A.

Partie C

Dans cette partie, on ne privilégie pas de valeur particulière du paramètre k.
Pour chacune des affirmations suivantes, dire si elle est vraie ou fausse et justifier la réponse.

1. Quelle que soit la valeur du nombre réel k, la représentation graphique de la fonction f_k est strictement comprise entre les droites d'équations $y = 0$ et $y = 1$.

2. Quelle que soit la valeur du réel k, la fonction f_k est strictement croissante.

3. Pour tout réel $k \geq 10$, $f_k\left(\frac{1}{2}\right) \geq 0{,}99$

3. Antilles-Guyane - Ancien bac S

Dans tout ce qui suit, m désigne un nombre réel quelconque.

Partie A

Soit f la fonction définie et dérivable sur l'ensemble des nombres réels $\mathbb{R}$ telle que :

$$f(x) = (x+1)e^{x}$$

1. Calculer la limite de f en $+\infty$ et $-\infty$.

2. On note f' la fonction dérivée de la fonction f sur $\mathbb{R}$. Démontrer que pour tout réel x,

$$f'(x) = (x+2)e^{x}\ .$$

3. Dresser le tableau de variation de f sur $\mathbb{R}$.

Partie B

On définit la fonction g_m sur $\mathbb{R}$ par :

$$g_m(x) = x + 1 - me^{-x}$$

et on note $\mathcal{C}_m$ la courbe de la fonction g_m dans un repère $(O;\ \vec{\imath}, \vec{\jmath})$ du plan.

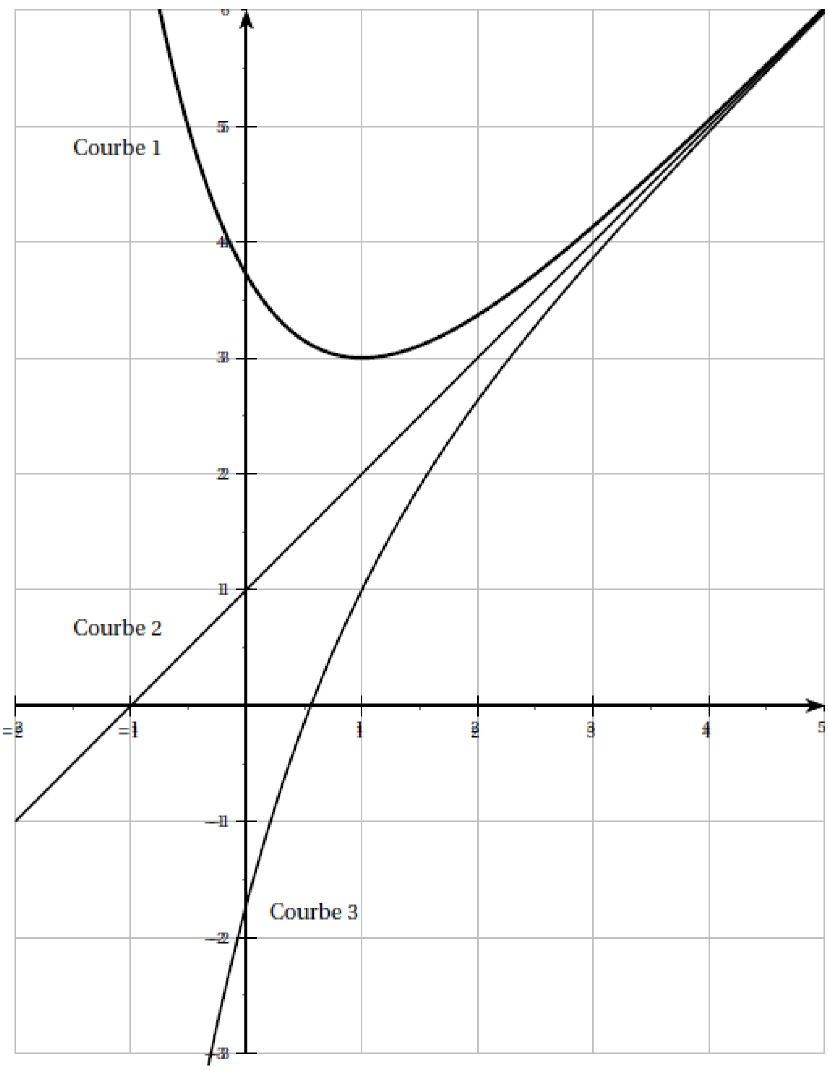
1. a. Démontrer que $g_m(x) = 0$ si et seulement si $f(x) = m$.

b. Déduire de la partie A, sans justification, le nombre de points d'intersection de la courbe $\mathcal{C}_m$ avec l'axe des abscisses en fonction du réel m.

2. On a représenté ci-contre les courbes $\mathcal{C}_0$, $\mathcal{C}_e$, et $\mathcal{C}_{-e}$ (obtenues en prenant respectivement pour m les valeurs 0, e et $-e$).
Identifier chacune de ces courbes sur la figure de l'annexe en justifiant.

3. Étudier la position de la courbe $\mathcal{C}_m$ par rapport à la droite $\mathcal{D}$ d'équation $y = x + 1$ suivant les valeurs du réel m.

4. (…) On admet que $\mathcal{A}(a) = 2e - 2e^{1-a}$.
En déduire la limite de $\mathcal{A}(a)$ quand a tend vers $+\infty$.



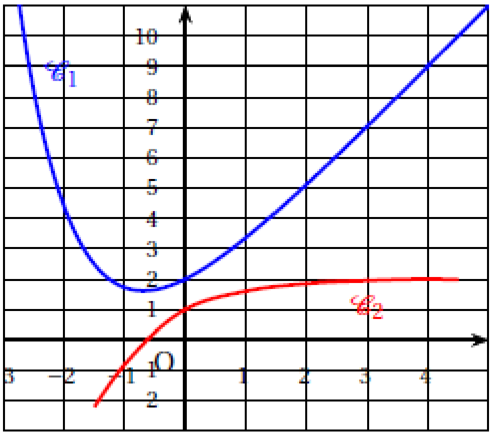
4. Pondichéry - Ancien bac S

Partie A

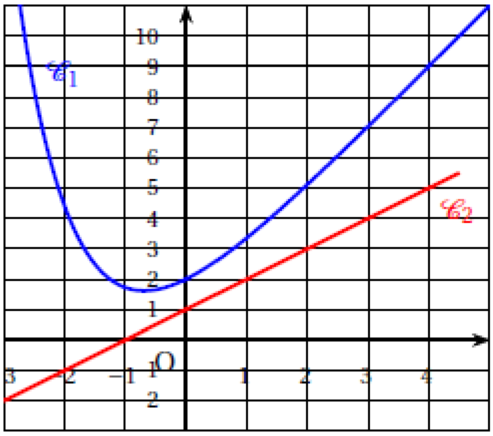
f est une fonction définie et dérivable sur $\mathbb{R}$. f' est la fonction dérivée de la fonction f .
Dans le plan muni d'un repère orthogonal, on nomme $\mathcal{C}_1$ la courbe représentative de la fonction f et $\mathcal{C}_2$ la courbe représentative de la fonction f'.
Le point A de coordonnées $(0;\ 2)$ appartient à la courbe $\mathcal{C}_1$
Le point B de coordonnées $(0;\ 1)$ appartient à la courbe $\mathcal{C}_2$

1. Dans les trois situations ci-dessous, on a dessiné la courbe représentative $\mathcal{C}_1$ de la fonction f .
Sur l'une d'entre elles, la courbe $\mathcal{C}_2$ de la fonction dérivée f' est tracée convenablement. Laquelle? Expliquer le choix effectué.

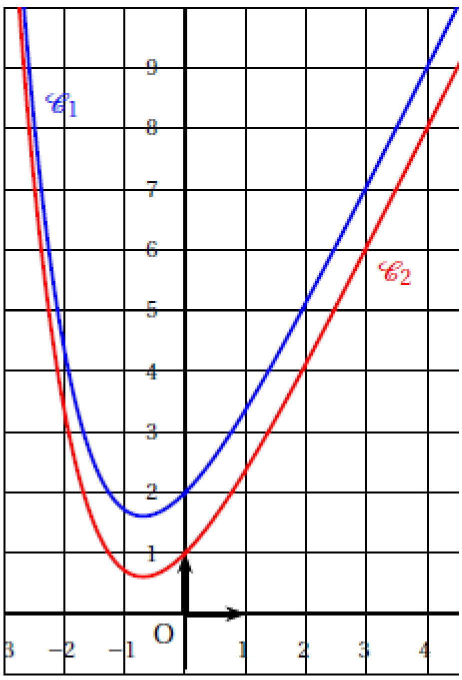
Situation 1



Situation 2 ($\mathscr{C}_2$ est une droite)



Situation 3



2. Déterminer l'équation réduite de la droite Δ tangente à la courbe $\mathcal{C}_1$ en A.

3. On sait que pour tout réel x, $f(x) = e^{-x} + ax + b$ où a et b sont deux nombres réels.

a. Déterminer la valeur de b en utilisant les renseignements donnés par l'énoncé.

b. Prouver que $a = 2$.

4. Étudier les variations de la fonction f sur $\mathbb{R}$.

5. Déterminer la limite de la fonction f en $+\infty$.

5. Asie - Ancien bac S

Une chaîne, suspendue entre deux points d'accroche de même hauteur peut être modélisée par la représentation graphique d'une fonction g définie sur $[-1\ ;\ 1]$ par

$$g(x) = \frac{1}{2a}\left(e^{ax} + e^{-ax}\right)$$

où a est un paramètre réel strictement positif. On ne cherchera pas à étudier la fonction g .

On montre en sciences physiques que, pour que cette chaîne ait une tension minimale aux extrémités, il faut et il suffit que le réel a soit une solution strictement positive de l'équation $(x-1)e^{2x} - 1 - x = 0$.

Dans la suite, on définit sur $[0\ ;\ +\infty[$ la fonction f pour tout réel $x > 0$, par :

$$f(x) = (x-1)e^{2x} - 1 - x$$

1. Déterminer la fonction dérivée de la fonction f. Vérifier que $f'(0) = -2$ et que $\lim\limits_{x \to +\infty} f'(x) = +\infty$.

2. On note f'' la fonction dérivée de f'. Vérifier que, pour tout réel $x > 0$, $f''(x) = 4xe^{2x}$.

3. Montrer que, sur l'intervalle $[0\ ;\ +\infty[$ la fonction f' s'annule pour une unique valeur, notée x_0.

4. a. Déterminer le sens de variation de la fonction f sur l'intervalle $[0\ ;\ +\infty[$, puis montrer que $f(x)$ est négatif pour tout réel x appartenant à l'intervalle $[0\ ;\ x_0]$.

b. Calculer $f(2)$. En déduire que sur l'intervalle $[0\ ;\ +\infty[$, la fonction f s'annule pour une unique valeur.
Si l'on note a cette valeur, déterminer à l'aide de la calculatrice la valeur de a arrondie au centième.