Exercice 8 : Équations du type $y' = f$

1) Ensemble des solutions

Résoudre chacune des équations suivantes en donnant l'ensemble S des fonctions solutions.

$y' = 4x$	$y' = \sin x$	$y' = \dfrac{1}{x^2}$	$y' = 4 + 6e^{-3x}$	$y' + 3x^2 = 0$	$y' + \dfrac{1}{x} = 0$

2) Solutions particulières

a. On considère l'équation différentielle (E) : $y' = 3x + 2$.
Déterminer la solution f de (E) qui s'annule en $x = 1$.

b. On considère l'équation différentielle (E) : $y' = \frac{4}{x}$.
Déterminer la solution g de (E) qui prend la valeur 3 en $x = e$.

c. On considère l'équation différentielle (E) : $y' + 8e^{2x} = 2x$.
Déterminer la solution h de (E) qui vaut 5 en $x = -1$.

Exercice 9 : Prédire la position du véhicule

Un véhicule se déplace en ligne droite le long d'un axe gradué (Ox).
A l'instant $t = 0$ (en secondes), il se trouve à la position $x_0 = 5$ (en mètres) avec une vitesse $v_0 = 7ms^{-1}$.
Il avance à accélération constante $a = 3\ ms^{-2}$.

1. Sachant que l'accélération est la dérivée de la vitesse v du véhicule, exprimer $v(t)$ en fonction de t.

2. a. On appelle $x(t)$ la position du véhicule à chaque instant t.
Déterminer l'équation différentielle vérifiée par x.

b. Résoudre cette équation différentielle de manière à trouver l'expression de $x(t)$.

c. En déduire la position du véhicule au bout de 10 secondes.

Exercice 10 : Équations du type $y' = ay$

1) Ensemble des solutions

Résoudre chacune des équations suivantes en donnant l'ensemble S des fonctions solutions.

$y' = 4y$	$y' = -y$	$y' = \dfrac{y}{2}$	$2y' + 6y = 0$	$y - 3y' = 0$	$(y')^2 - y^2 = 0$

2) Solutions particulières

a. On considère l'équation différentielle (E) : $y' = 2y$.
Déterminer la solution f de (E) qui prend la valeur 13 en $x = 0$.

b. On considère l'équation différentielle (E) : $y' = -3y$.
Déterminer la solution g de (E) qui vaut -5 en $x = \frac{1}{3}$.

c. On considère l'équation différentielle (E) : $4y' + y = 0$.
Déterminer la solution h de (E) qui prend la valeur 7 en $x = -8$.

Exercice 11 : Résolution guidée de $y' = ay + f$

1) On considère l'équation différentielle :

$$(E)\ :\ y' = 2y + 8$$

a. Soit f la fonction constante définie par $f(x) = -4$.
Montrer que f est solution de l'équation (E).

b. On considère maintenant l'équation différentielle (E_0) : $y' = 2y$.
Déterminer la solution g de (E_0) qui vaut 3 en $x = 1$.

c. Montrer que la fonction $h = f + g$ est une solution de (E).

2) On considère l'équation différentielle :

$$(E)\ :\ y' = x - y$$

a. Soit f la fonction définie par $f(x) = x - 1$.
Montrer que f est solution de l'équation (E).

b. On considère maintenant l'équation différentielle (E_0) : $y' = -y$.
Déterminer la solution g de (E_0) qui vaut -5 en $x = 2$.

c. Montrer que la fonction $h = f + g$ est une solution de (E).

Plus loin...

Exercice 12 : Chauffage d'un liquide

On chauffe dans une grande cuve un liquide et on appelle $g(t)$ sa température en degrés Celsius à l'instant t exprimé en secondes.
La température à l'instant initial $t = 0$ est de 22°C.
Des ingénieurs ont modélisé l'évolution de la température du liquide en montrant que g était solution de l'équation différentielle suivante.

$$(E) :\ y' - 0{,}002y = 0{,}02$$

1) Soit f la fonction constante définie par $f(x) = \alpha$, où α est un nombre réel.
Déterminer la valeur de α pour que f soit solution de (E).

2) Sachant que g est une solution de (E), exprimer $g'(t)$ en fonction de $g(t)$.

3) Soit h la fonction définie par $h(t) = g(t) + 10$.
Montrer que h est solution de l'équation différentielle :

$$(E_0)\ :\ y' - 0{,}002y = 0$$

4) Résoudre l'équation (E_0).

5) En déduire l'expression de $g(t)$ en fonction de t.

6) Quelle sera la température du liquide au bout d'une minute ?
Arrondir au 10^{e} de degré.

7) Au bout de combien de temps la température va-t-elle dépasser 86°C ?
Donner la réponse en minutes - secondes.