

Corrigé 10.

1. d passe par O et est dirigée par $\vec{u}$ donc on obtient : $d : \begin{cases} x = t \\ y = t \\ z = 0 \end{cases} \quad t \in \mathbb{R}$

2. a. On a $\overrightarrow{AM} \begin{pmatrix} t-1 \\ t-3 \\ 2 \end{pmatrix}$ donc on a : $AM^2 = (t-1)^2 + (t-3)^2 + 4 = t^2 - 2t + 1 + t^2 - 6t + 9 + 4$
 $= 2t^2 - 8t + 14 \quad \text{CQFD}$

b. Pour $t = 2$, la représentation paramétrique de d donne le point M_0 donc $M_0 \in d$.
Soit $D(t) = 2t^2 - 8t + 14$. Il s'agit de déterminer si la fonction D admet un minimum en $t = 2$.

1^{re} méthode : D est polynôme du 2^d degré convexe ($a = 2 > 0$) dont le sommet de la parabole se situe en $t_0 = -\frac{b}{2a} = \frac{8}{4} = 2$. Donc D possède un minimum en $t = 2$.

2^e méthode : On a $D'(t) = 4t - 8$ qui s'annule en $t = 2$, est négative pour $t < 2$ et positive pour $t > 2$. Donc D possède un minimum en $t = 2$.

La quantité $AM^2 = D(t)$ est donc minimale pour $t = 2$, donc AM est aussi minimale pour $t = 2$, c'est-à-dire lorsque M se trouve en M_0 .

3. On a $\overrightarrow{AM_0} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$, ainsi $\vec{u} \cdot \overrightarrow{AM_0} = 1 - 1 + 0 = 0$ donc (AM_0) et d sont orthogonales.

(Puisque $M_0 \in d$, (AM_0) et d sont même plus précisément perpendiculaires)

4. a. Soit M un point quelconque du plan $(AA'M_0)$. Montrons que M est forcément plus loin de O que M_0 , c'est-à-dire que $OM \geq OM_0$.

Puisque $(AA'M_0)$ est perpendiculaire à (OM_0) en M_0 , le triangle MM_0O est rectangle en M_0 . OM étant la longueur de son hypoténuse, c'est-à-dire le plus grand de ses 3 côtés, on a donc $OM \geq OM_0$.

M_0 est donc le point du plan $(AA'M_0)$ le plus proche du point O .

b. La pyramide $OM_0A'A$ a pour hauteur $h = AA'$ et pour base correspondante le triangle rectangle OM_0A' .

Or $\overrightarrow{AA'} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$ donc $h = 2$. $\overrightarrow{OM_0} \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$ donc $OM_0 = \sqrt{8} = 2\sqrt{2}$. $\overrightarrow{M_0A'} \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ donc $M_0A' = \sqrt{1+1} = \sqrt{2}$.

On a donc $\mathcal{B} = \frac{1}{2} OM_0 \times M_0A' = \frac{1}{2} 2\sqrt{2} \times \sqrt{2} = 2$.

Le volume de la pyramide $OM_0A'A$ est donc : $V = \frac{1}{3} 2 \times 2 = \frac{4}{3}$