Savoirs Fle. 3 : Transformations d'égalités

Exercice 11 : Transformations d'écritures

1) Simplifier les expressions suivantes, <u>quand c'est possible</u> :

$A = e^{\ln 2}$ $\quad B = \ln(e^{-3x})$ $\quad C = e^{\ln(5x)}$

$D = \ln(1-2e^{x})$ $\quad E = \ln(e^{1-2x})$ $\quad F = e^{2x+\ln 3}$

$G = e^{\ln(2x+3)}$ $\quad H = 1+\ln(e^{3x})$

$I = \ln(x+e^{2})$ $\quad J = 5xe^{\ln(-2x)}$

2) Transformer les égalités ou inégalités suivantes, en en prenant le logarithme népérien

$\boldsymbol{a})\ e^{2x+1} = 2$ $\quad \boldsymbol{b})\ e^{3-x} = 3$ $\quad \boldsymbol{c})\ \dfrac{x}{2} < e^{0,5x-5}$ $\quad \boldsymbol{d})\ e^{0,1x^2} = x-1$ $\quad \boldsymbol{e})\ e^{x}(x+1) \geq 1$

3) Transformer les égalités ou inégalités suivantes, en en prenant l'exponentielle

$\boldsymbol{a})\ \ln(2-x) = -4$ $\quad \boldsymbol{b})\ \ln(5x) \leq 2x$ $\quad \boldsymbol{c})\ \ln(x-1) = x+1$ $\quad \boldsymbol{d})\ \ln\left(\dfrac{1}{x+3}\right) > 1-x$

4) Simplifier le plus possible les expressions suivantes :

$A = \ln\left(\dfrac{e^{x}}{2}\right) - \ln(e^{x-3})$ $\quad B = e^{\ln 6 - 2\ln 3}$ $\quad C = \dfrac{\ln(e^{2x})}{\ln\big(e^{x}(1-x)\big)}$ $\quad D = \dfrac{e^{\ln(2x)-1}}{\ln(2e^{3x})}$

Exercice 12 : Démontrer des égalités ou inégalités

1) Soit α la solution de l'équation $e^{x-1} = \frac{1}{3e^{x}}$. Montrer que $2\alpha = 1 - \ln 3$.

2) Montrer que, pour $x > 0$, on a : $1 < \frac{e^{x}}{x} < e \iff 0 < x - \ln x < 1$

3) On définit les fonctions f et g pour $x > 0$ par :

$$f(x) = \frac{1}{x^2}\, e^{-\frac{1}{2x}} \quad \text{et} \quad g(x) = \ln\big(f(x)\big)$$

Montrer que, pour tout $x > 0$, on a $g(x) = -\frac{1+4x\ln x}{2x}$

Un peu plus…

Soit l'équation :

$$(I) :\ x^2 - x = \ln\left(\frac{3}{x}\right)$$

On appelle s une solution de (I). Montrer que :

$$\frac{e^{s}}{s} = \frac{1}{3}e^{s^2}$$

Exercice 13 : Exercice type bac

Partie I

Soit g la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = e^{x} - xe^{x} + 1$

1) Étudier les variations de g

2) a. Démontrer que l'équation $g(x) = 0$ admet sur $[0; 2]$ une unique solution. On note α cette solution.

b. À l'aide de la calculatrice, déterminer un encadrement d'amplitude 10^{-2} de α.

c. Démontrer que : $e^{\alpha} = \frac{1}{\alpha-1}$

3) Déterminer le signe de $g(x)$ suivant les valeurs de x sur $[0; +\infty[$

Partie 2

Soit A la fonction définie et dérivable sur $[0;+\infty[$ par $A(x)=\frac{4x}{e^x+1}$

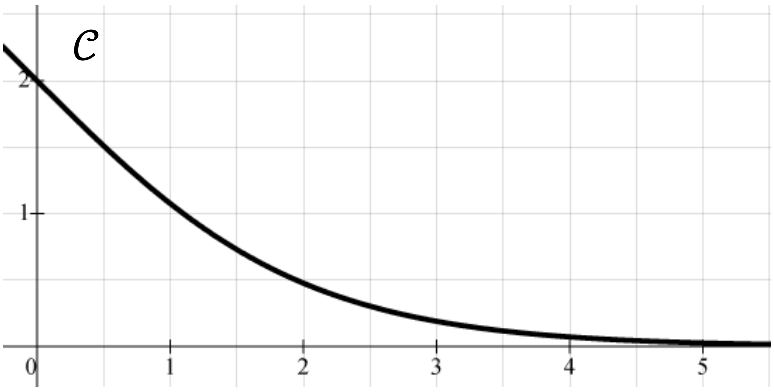
1) Démontrer que, pour tout x positif non nul, $A'(x)$ a le même signe que $g(x)$, où g est la fonction définie dans la partie 1.

2) En déduire les variations de la fonction A sur $[0;+\infty[$.

Partie 3

On considère la fonction f définie sur $[0;+\infty[$ par $f(x)=\frac{4}{e^x+1}$.

On note $\mathcal{C}$ sa courbe représentative dans un repère orthogonal. La figure est donnée ci-contre.



Pour tout réel x positif et non nul, on note M, P et Q les points de coordonnées $M\left(x;f(x)\right)$, $P(x;0)$ et $Q\left(0;f(x)\right)$.

Démontrer que l'aire du rectangle OMPQ est maximale lorsque M a pour abscisse α.