Corrections Savoir Sr. 1

Attention à la rédaction de la démonstration, elle est essentielle ! Chaque mot a son importance…
On n'a pas le droit « d'oublier » une des trois étapes.

Corrigé Exercice 1

1) *Init.* : Pour $n = 0$, on a $u_n = u_0 = 2$ et $-\frac{1}{2}(3^n - 5) = -\frac{1}{2}(1 - 5) = 2$. L'égalité est **vraie pour $\boldsymbol{n = 0}$**.

Hérédité : **Si pour $\boldsymbol{n = p}$, l'égalité est vraie**, on a : $u_p = -\frac{1}{2}(3^p - 5)$

Alors pour $n = p + 1$ on a :

D'une part : $u_n = u_{p+1} = 3u_p - 5 = 3\left(-\frac{1}{2}(3^p - 5)\right) - 5 - \frac{1}{2}3^{p+1} + \frac{5}{2} = -\frac{1}{2}(3^{p+1} - 5)$

Et d'autre part : $-\frac{1}{2}(3^n - 5) = -\frac{1}{2}(3^{p+1} - 5)$ **Alors l'égalité est vraie pour $\boldsymbol{n = p + 1}$.**

Ccl **:** Ainsi, **pour tout nombre entier $\boldsymbol{n}$, on a bien** $\boldsymbol{u_n = -\frac{1}{2}(3^n - 5)}$

2) *Init.* : Pour $n = 0$, on a $u_n = u_0 = -\frac{2}{3}$ et $\frac{1}{3} - (-2)^n = \frac{1}{3} - 1 = -\frac{2}{3}$. L'égalité est **vraie pour $\boldsymbol{n = 0}$**.

Hérédité : **Si pour $\boldsymbol{n = p}$, l'égalité est vraie**, on a : $u_p = \frac{1}{3} - (-2)^p$

Alors pour $n = p + 1$ on a :

D'une part $u_n = u_{p+1} = -2u_p + 1 = -2\left(\frac{1}{3} - (-2)^p\right) + 1 = -\frac{2}{3} - (-2)^{p+1} + 1 = \frac{1}{3} - (-2)^{p+1}$

Et d'autre part : $\frac{1}{3} - (-2)^n = \frac{1}{3} - (-2)^{p+1}$ **Alors l'égalité est vraie pour $\boldsymbol{n = p + 1}$.**

Ccl **:** Ainsi, **pour tout nombre entier $\boldsymbol{n}$, on a bien** $\boldsymbol{u_n = \frac{1}{3} - (-2)^n}$

3) *Init.* : Pour $n = 0$, on a $u_n = u_0 = 1$ et $5 - 4 \times 0{,}8^n = 5 - 4 = 1$. L'égalité est **vraie pour $\boldsymbol{n = 0}$**.

Hérédité : **Si pour $\boldsymbol{n = p}$, l'égalité est vraie**, on a : $u_p = 5 - 4 \times 0{,}8^p$.

Alors pour $n = p + 1$ on a :

D'une part $u_n = u_{p+1} = 0{,}8u_p + 1 = 0{,}8(5 - 4 \times 0{,}8^p) + 1 = 4 - 4 \times 0{,}8^{p+1} + 1 = \boldsymbol{5 - 4 \times 0{,}8^{p+1}}$

Et d'autre part : $5 - 4 \times 0{,}8^n = \boldsymbol{5 - 4 \times 0{,}8^{p+1}}$. **Alors l'égalité est vraie pour $\boldsymbol{n = p + 1}$.**

Conclusion **:** Ainsi, **pour tout entier $\boldsymbol{n}$, on a bien** $\boldsymbol{u_n = 5 - 4 \times 0{,}8^n}$

4) *Init.* : Pour $n = 0$, on a $u_n = u_0 = 1$ et $3 \times 2^n + n - 2 = 3 - 2 = 1$. L'égalité est **vraie au rang 0**

Hérédité : **Si pour $\boldsymbol{n = p}$, l'égalité est vraie**, on a : $u_p = 3 \times 2^p + p - 2$

Alors pour $n = p + 1$ on a :

$u_n = u_{p+1} = 2u_p - p + 3 = 2(3 \times 2^p + p - 2) - p + 3 = \boldsymbol{3 \times 2^{p+1} + p - 1}$

Et $3 \times 2^n + n - 2 = 3 \times 2^{p+1} + (p + 1) - 2 = \boldsymbol{3 \times 2^{p+1} + p - 1}$

Alors l'égalité est vraie pour $\boldsymbol{n = p + 1}$.

Conclusion **:** Ainsi, **pour tout entier $\boldsymbol{n}$, on a bien** $\boldsymbol{u_n = 3 \times 2^n + n - 2}$

5) a. On a $u_1 = 1$; $u_2 = 3$; $u_3 = 6$; $u_4 = 10$ et $u_5 = 15$.

b. *Init.* : Pour $n = 0$, on a $0 \times \frac{0+1}{2} = \frac{0}{2} = 0 = u_0$ **La propriété est vraie au rang 0**

Hérédité : **Si pour $\boldsymbol{n = p}$, l'égalité est vraie**, on a : $u_p = \frac{p(p+1)}{2}$

Alors pour $n = p + 1$ on a :

$u_n = u_{p+1} = u_p + (p+1) = \frac{p(p+1)}{2} + (p+1) = \frac{p(p+1)+2(p+1)}{2} = \frac{(p+1)(p+2)}{2}$.

Et d'autre part : $\frac{n(n+1)}{2} = \frac{(p+1)(p+1+1)}{2} = \frac{(p+1)(p+2)}{2}$. **Alors l'égalité est vraie pour $\boldsymbol{n = p + 1}$.**

Ccl **: Ainsi, pour tout nombre entier $\boldsymbol{n}$, on a bien** $\boldsymbol{u_n = \frac{n(n+1)}{2}}$

6) a. *Init.* : Pour $n = 0$, on a $u_n = u_0 = 3$ et $2^{0+1} + 1 = 2 + 1 = 3$ **La propriété est vraie au rang 0**

Hérédité : **Si pour $\boldsymbol{n = p}$, l'égalité est vraie**, on a : $u_p = 2^{p+1} + 1$

Alors pour $n = p + 1$ on a :

$u_n = u_{p+1} = 2u_p - 1 = 2(2^{p+1} + 1) - 1 = 2^{p+2} + 2 - 1 = 2^{p+2} + 1$.

Et : $2^{n+1} + 1 = 2^{p+1+1} + 1 = 2^{p+2} + 1$. **Alors l'égalité est vraie pour $\boldsymbol{n = p + 1}$.**

Ccl **: Ainsi, pour tout nombre entier $\boldsymbol{n}$, on a bien** $\boldsymbol{u_n = 2^{n+1} + 1}$

b. *Init.* : Pour $n = 0$, on a $2u_0 - v_0 = 2 \times 3 - 1 = 5$ **La propriété est vraie au rang 0**

Hérédité : **Si pour $\boldsymbol{n = p}$, l'égalité est vraie**, on a : $2u_p - v_p = 5$

Alors pour $n = p + 1$ on a :

$2u_n - v_n = 2u_{p+1} - v_{p+1} = 2(2u_p - 1) - (2v_p + 3) = 4u_p - 2v_p - 5 = 2(2u_p - v_p) - 5$

$= 2 \times 5 - 5 = 5$. **Alors l'égalité est vraie pour $\boldsymbol{n = p + 1}$.**

Ccl **: Pour tout nombre entier $\boldsymbol{n}$, on a bien** $\boldsymbol{2u_n - v_n = 5}$.

c. $v_n = 2u_n - 5 = 2(2^{n+1} + 1) - 5 = \boldsymbol{2^{n+2} - 3}$.