Corrections Savoir Vp.3

Corrigé Exercice 9

1) (AB) a pour vecteur directeur $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}5\\-3\\-3\end{pmatrix}$: elle a pour représentation paramétrique $\begin{cases}x=-3+5\theta\\y=1-3\theta\\z=4-3\theta\end{cases}$ $,\theta\in\mathbb{R}$

On cherche donc à résoudre : $\begin{cases}-6-2t=-3+5\theta\\3+t=1-3\theta\\8-t=4-3\theta\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}-6-2(-2-3\theta)=-3+5\theta\\t=-2-3\theta\\8-(-2-3\theta)=4-3\theta\end{cases}$

$\Leftrightarrow\begin{cases}-2+6\theta=-3+5\theta\\t=-2-3\theta\\10+3\theta=4-3\theta\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\theta=-1\\t=-2-3\theta\\6\theta=-6\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\theta=-1\\t=1\\\theta=-1\end{cases}$ et donc : $\begin{cases}x=-6-2=-8\\y=3+1=4\\z=8-1=7\end{cases}$

Le système a bien une solution : **les droites ont un point d'intersection, il s'agit du point $\boldsymbol{C(-8;4;7)}$**

2) (EF) a pour vecteur directeur $\overrightarrow{EF}\begin{pmatrix}1\\-1\\2\end{pmatrix}$ et d a pour vecteur directeur $\vec{u}\begin{pmatrix}2\\-2\\4\end{pmatrix}$

On a $\vec{u}=2\overrightarrow{EF}$: les vecteurs directeurs sont colinéaires, donc **les droites sont parallèles.**

Pour savoir si elles sont strictement parallèles ou confondues, il suffit de vérifier si un point de l'une appartient à l'autre :

On teste si F appartient à d en cherchant à résoudre : $\begin{cases}x_F=-1+2t\\y_F=2-2t\\z_F=-4+4t\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}5=-1+2t\\-1=2-2t\\3=-4+4t\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}t=3\\t=\frac{3}{2}\\t=\frac{7}{4}\end{cases}$

Il n'y a pas de solution, le point F n'appartient pas à la droite d : **les deux droites sont strictement parallèles**

3) ❶ Pour d_1 et d_2 : on cherche à résoudre $\begin{cases}-1+3t=-4-3t'\\1-3t=9-2t'\\2t=-5+t'\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}-1+3t=-4-3(2t+5)\\1-3t=9-2(2t+5)\\2t+5=t'\end{cases}$

$\Leftrightarrow\begin{cases}-1+3t=-6t-19\\1-3t=-4t-1\\2t+5=t'\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}9t=-18\\t=-2\\2t+5=t'\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}t=-2\\t=-2\\t'=1\end{cases}$ donc $\begin{cases}x=-4-3=-7\\y=9-2=7\\z=-5+1=-4\end{cases}$

Le système a bien une solution : **les droites $\boldsymbol{d_1}$ et $\boldsymbol{d_2}$ sont sécantes au point $\boldsymbol{A(-7;7;-4)}$**

❷ Pour d_1 et d_3 : on cherche à résoudre $\begin{cases}-1+3t=-6\theta\\1-3t=6\theta\\2t=-4\theta\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}-1+3(-2\theta)=-6\theta\\1-3(-2\theta)=6\theta\\t=-2\theta\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}-1=0\\1=0\\t=-2\theta\end{cases}$

Le système n'a pas de solution : les **droites $\boldsymbol{d_1}$ et $\boldsymbol{d_3}$ ne sont pas sécantes**

Leurs vecteurs directeurs sont $\overrightarrow{u_1}\begin{pmatrix}3\\-3\\2\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{u_3}\begin{pmatrix}-6\\6\\-4\end{pmatrix}$ on a $\overrightarrow{u_3}=-2\overrightarrow{u_1}$ les vecteurs directeurs étant colinéaires, les droites **$\boldsymbol{d_1}$ et $\boldsymbol{d_3}$ sont donc strictement parallèles**

❸ Pour d_2 et d_3 : on cherche à résoudre $\begin{cases}-4-3t'=-6\theta\\9-2t'=6\theta\\-5+t'=-4\theta\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}-4-3(5-4\theta)=-6\theta\\9-2(5-4\theta)=6\theta\\t'=5-4\theta\end{cases}$

$\Leftrightarrow\begin{cases}-19+12\theta=-6\theta\\-1+8\theta=6\theta\\t'=5-4\theta\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}18\theta=19\\2\theta=1\\t'=5-4\theta\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\theta=\frac{19}{18}\\\theta=\frac{1}{2}\\t'=5-4\theta\end{cases}$

Le système n'a pas de solution : les **droites $\boldsymbol{d_2}$ et $\boldsymbol{d_3}$ ne sont pas sécantes**

Leurs vecteurs directeurs sont $\overrightarrow{u_2}\begin{pmatrix}-3\\-2\\1\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{u_3}\begin{pmatrix}-6\\6\\-4\end{pmatrix}$ on a $\frac{x_{\overrightarrow{u_2}}}{x_{\overrightarrow{u_3}}}=\frac{-3}{-6}=\frac{1}{2}$; $\frac{y_{\overrightarrow{u_2}}}{y_{\overrightarrow{u_3}}}=-\frac{2}{6}=-\frac{1}{3}\neq\frac{x_{\overrightarrow{u_2}}}{x_{\overrightarrow{u_3}}}$

Donc les droites ne sont pas parallèles, ni sécantes : $\boldsymbol{d_2}$**et** $\boldsymbol{d_3}$ **sont non coplanaires**

Corrigé Exercice 10

1) a) On cherche à résoudre : $\begin{cases}x=-7+t\\y=4+2t\\z=-5-t\\-2x-3y+z-6=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=-7+t\\y=4+2t\\z=-5-t\\-2(-7+t)-3(4+2t)+(-5-t)-6=0\end{cases}$

$\Leftrightarrow\begin{cases}x=-7+t\\y=4+2t\\z=-5-t\\-9-9t=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=-7+t\\y=4+2t\\z=-5-t\\t=-1\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=-7-1=-8\\y=4-2=2\\z=-5+1=-4\\t=-1\end{cases}$ $\boldsymbol{d_1}$ **et** $\boldsymbol{\mathcal{P}_1}$ **sont sécants en** $\boldsymbol{R(-8;2;-4)}$

b) On cherche à résoudre : $\begin{cases}x=4-t\\y=-12+5t\\z=9-6t\\4x+2y+z-1=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=4-t\\y=-12+5t\\z=9-6t\\4(4-t)+2(-12+5t)+9-6t-1=0\end{cases}$

$\Leftrightarrow\begin{cases}x=4-t\\y=-12+5t\\z=9-6t\\\boldsymbol{0=0}\end{cases}$ Le système a une **infinité** de solution : **La droite** $\boldsymbol{d_2}$ **est contenue dans le plan** $\boldsymbol{\mathcal{P}_2}$

2) $\overrightarrow{AB}=\begin{pmatrix}6\\-5\\6\end{pmatrix}$ La droite (AB) passe par A et a pour représentation paramétrique $\begin{cases}x=-5+6t\\y=4-5t\quad,\ t\in\mathbb{R}\\z=-3+6t\end{cases}$

On cherche donc à résoudre $\begin{cases}x=-5+6t\\y=4-5t\\z=-3+6t\\x+y+3z-1=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=-5+6t\\y=4-5t\\z=-3+6t\\-5+6t+4-5t+3(-3+6t)-9=0\end{cases}$

$\Leftrightarrow\begin{cases}x=-5+6t\\y=4-5t\\z=-3+6t\\19t-19=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=-5+6=1\\y=4-5=-1\\z=-3+6=3\\\boldsymbol{t=1}\end{cases}$ donc $\boldsymbol{(AB)}$ **et Π sont sécants en** $\boldsymbol{B(1;-1;3)}$

3) a) On cherche à résoudre : $\begin{cases}x=-1-2\theta\\y=2-\theta\\z=-3+5\theta\\x+5y+z+6=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=-1-2\theta\\y=2-\theta\\z=-3+5\theta\\-1-2\theta+5(2-\theta)+-3+5\theta+6=0\end{cases}$

$\Leftrightarrow\begin{cases}x=-1-2\theta\\y=2-\theta\\z=-3+5\theta\\-2\theta+12=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=-1-12=-13\\y=2-6=-4\\z=-3+30=27\\\boldsymbol{\theta=6}\end{cases}$ $\boldsymbol{d}$ **et** $\boldsymbol{\mathcal{P}}$ **sont sécants en** $\boldsymbol{M(-13;-4;27)}$

b) La droite d passe par C et a pour représentation paramétrique $\begin{cases}x=6+t\\y=-1+2t,\ t\in\mathbb{R}\\z=-3-t\end{cases}$

Le plan $\mathcal{P}$ a une équation cartésienne du type $x+y+3z+d=0$ Or il passe par D, on a donc :
$x_D+y_D+3z_D+d=0\Leftrightarrow 4+0-3+d=0\Leftrightarrow d=-1$ L'équation de $\mathcal{P}$ est : $\boldsymbol{x+y+3z-1=0}$

On cherche à résoudre : $\begin{cases} x = 6 + t \\ y = -1 + 2t \\ z = -3 - t \\ x + y + 3z - 1 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 6 + t \\ y = -1 + 2t \\ z = -3 - t \\ 6 + t - 1 + 2t + 3(-3 - t) - 1 = 0 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} x = 6 + t \\ y = -1 + 2t \\ z = -3 - t \\ \mathbf{-5 = 0} \end{cases}$ Le système n'admet **aucune** solution : **la droite $\boldsymbol{d}$ et le plan $\boldsymbol{\mathcal{P}}$ sont parallèles**

Corrigé Exercice 11

1) a) Les vecteurs normaux $\overrightarrow{n_1}\begin{pmatrix}1\\1\\2\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{n_2}\begin{pmatrix}-2\\4\\5\end{pmatrix}$ ne sont pas colinéaires, donc les plans sont sécants

En posant $x = t$ avec $t \in \mathbb{R}$, on a : $\begin{cases} x + y + 2z - 3 = 0 \\ -2x + 4y + 5z + 6 = 0 \\ x = t \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t + y + 2z - 3 = 0 \\ -2t + 4y + 5z + 6 = 0 \\ x = t \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} y = -2z + 3 - t \\ -2t + 4(-2z + 3 - t) + 5z + 6 = 0 \\ x = t \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = -2z + 3 - t \\ -3z + 18 - 6t = 0 \\ x = t \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = -2(6 - 2t) + 3 - t \\ z = 6 - 2t \\ x = t \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} x = t \\ y = 3t - 9 \\ z = 6 - 2t \end{cases}, t \in \mathbb{R}$ C'est la **représentation paramétrique de la droite d'intersection de $\boldsymbol{\mathcal{P}_1}$ et $\boldsymbol{\mathcal{P}_2}$**

Droite passant par le point $R(0; -9; 6)$ et de vecteur directeur $\vec{u}(1; 3; -2)$

b) Les vecteurs normaux $\overrightarrow{n_1}\begin{pmatrix}1\\0\\-2\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{n_2}\begin{pmatrix}0\\1\\-2\end{pmatrix}$ ne sont pas colinéaires, donc les plans sont sécants

En posant $z = t$ avec $t \in \mathbb{R}$, on a : $\begin{cases} x - 2z - 1 = 0 \\ y - 2z + 4 = 0 \\ z = t \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x - 2t - 1 = 0 \\ y - 2t + 4 = 0 \\ z = t \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 + 2\boldsymbol{t} \\ y = -4 + 2\boldsymbol{t} \\ z = t \end{cases}, t \in \mathbb{R}$

C'est la **représentation paramétrique de la droite d'intersection de $\boldsymbol{\Pi_1}$ et $\boldsymbol{\Pi_2}$**

Droite passant par le point $S(1; -4; 0)$ et de vecteur directeur $\vec{v}(2; 2; 1)$

2) a) Les vecteurs normaux $\overrightarrow{n_1}\begin{pmatrix}1\\-1\\-2\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{n_2}\begin{pmatrix}-2\\2\\4\end{pmatrix}$ sont colinéaires : on a $\overrightarrow{n_2} = -2\overrightarrow{n_1}$,

Donc les plans $\mathcal{P}_1$ et $\mathcal{P}_2$ sont parallèles.

Pour voir s'ils sont ou non confondus, il faut tester si un point de l'un appartient à l'autre. Il faut donc commencer par trouver un point appartenant à un des plans… une infinités de possibilités :

Soit $A\left(0; 0; -\frac{1}{2}\right)$ *(par exemple, en calculant z pour $x = y = 0$)* un point de $\mathcal{P}_1$, vérifions si A appartient à $\mathcal{P}_2$:

$-2x_A + 2y_A + 4z_A + 4 = 4 \times \left(-\frac{1}{2}\right) + 4 = 2 \neq 0$

Donc $A \notin \mathcal{P}_2$ **les deux plans sont strictement parallèles**

b) On résout : $\begin{cases} x = -1 - t + 4t' \\ y = t \\ z = 2 + 3t - 5t' \\ -x + y - z + 2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -1 - t + 4t' \\ y = t \\ z = 2 + 3t - 5t' \\ 1 + t - 4t' + t - 2 - 3t + 5t' + 2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -1 - t + 4t' \\ y = t \\ z = 2 + 3t - 5t' \\ 1 - t + t' = 0 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} x = -1 - t + 4(-1 + t) \\ y = t \\ z = 2 + 3t - 5(-1 + t) \\ t' = -1 + t \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -5 + 3t \\ y = t \\ z = 7 - 2t \\ t' = -1 + t \end{cases}$

Les plans sont donc sécants le long de la droite de représentation paramétrique : $\begin{cases} x = -5 + 3t \\ y = t \\ z = 7 - 2t \end{cases}, \ t \in \mathbb{R}$

Droite passant par le point $T(-5; 0; 7)$ et de vecteur directeur $\vec{w}(3; 1; -2)$

Corrigé Exercice 12

1) a) *Montrer que d_1 et d_2 ne sont pas coplanaires revient à montrer qu'elles ne sont ni sécantes, ni parallèles.*

Les vecteurs directeurs $\overrightarrow{u_1}\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{u_2}\begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$ ne sont pas colinéaires, donc les droites ne sont pas parallèles.

On résout : $\begin{cases} 1 + t = 3\theta \\ 2 - t = 1 + 2\theta \\ 3 + 2t = 2 - \theta \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t = 3\theta - 1 \\ 2 - (3\theta - 1) = 1 + 2\theta \\ 3 + 2(3\theta - 1) = 2 - \theta \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t = 3\theta - 1 \\ 2 - 3\theta + 1 = 1 + 2\theta \\ 3 + 6\theta - 2 = 2 - \theta \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t = 3\theta - 1 \\ \theta = \frac{2}{5} \\ \theta = \frac{1}{7} \end{cases}$

Le système n'a pas de solution, donc les **droites n'ont pas d'intersection.**

Les droites d_1 *et* d_2 ne sont pas sécantes, ni parallèles : elles **sont donc non coplanaires**

b) La droite d_1 a pour vecteur directeur $\overrightarrow{u_1}\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$ et la droite d_2 passe par le point $A(0; 1; 2)$

Donc la droite $\boldsymbol{d_3}$ **passant par A et de vecteur directeur $\overrightarrow{\boldsymbol{u_1}}$** est parallèle à d_1 et sécante à d_2

c) On a d_3 : : $\begin{cases} x = t \\ y = 1 - t \\ z = 2 + 2\boldsymbol{t} \end{cases}, \ t \in \mathbb{R}$

2) a) On a $E(0; 0; 1)$; $M\left(\frac{1}{2}; 0; 0\right)$; $N\left(1; \frac{1}{2}; 0\right)$ et $P\left(\frac{1}{2}; 1; 1\right)$

$\overrightarrow{PM} = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}$ et la droite (PM) passe par M donc une représentation paramétrique est : $\begin{cases} x = \boldsymbol{\frac{1}{2}} \\ y = -t \\ z = -\boldsymbol{t} \end{cases}, \ t \in \mathbb{R}$

$\overrightarrow{EN} = \begin{pmatrix} 1 \\ \frac{1}{2} \\ -1 \end{pmatrix}$ et la droite (EN) passe par E donc une représentation paramétrique est : $\begin{cases} x = \boldsymbol{t} \\ y = \boldsymbol{\frac{1}{2}t} \\ z = \boldsymbol{1 - t} \end{cases}, \ t \in \mathbb{R}$

b) Les vecteurs $\overrightarrow{PM}$ et $\overrightarrow{EN}$ ne sont pas colinéaires, donc les droites (EN) et (PM) ne sont pas parallèles.

On résout : $\begin{cases} \frac{1}{2} = \theta \\ -t = \frac{1}{2}\theta \\ -t = 1 - \theta \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{1}{2} = \theta \\ t = \frac{1}{4} \\ t = \frac{1}{2} \end{cases}$

Le système n'a pas de solution, donc les **droites** (EN) et (PM) **n'ont pas d'intersection.**

Les droites (EN) et (PM) , et par conséquent **les points E, M, N et P sont donc non coplanaires**

3) a) *Pour montrer que 3 droites sont concourantes, il faut trouver le point d'intersection des 2 premières et montrer qu'il appartient à la 3^e^*

On résout : $\begin{cases} 1 - t = 1 + 2\theta \\ 2 + t = 2 - 2\theta \\ 3 - 2t = -1 - 4\theta \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t = -2\theta \\ 2 - 2\theta = 2 - 2\theta \\ 3 + 4\theta = -1 - 4\theta \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t = -2\theta \\ 2 = 2 \\ 8\theta = -4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t = 1 \\ 2 = 2 \\ \theta = -\frac{1}{2} \end{cases}$

donc $\begin{cases} x = 1 - 1 = 0 \\ y = 2 + 1 = 3 \\ z = 3 - 2 = 1 \end{cases}$ **Les droites $\boldsymbol{d_1}$ et $\boldsymbol{d_2}$ sont sécantes au point $\boldsymbol{P(0; 3; 1)}$**

Vérifions si P appartient à d_3 : $\begin{cases} x_P = -2+4t \\ y_P = 1+4t \\ z_P = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 0 = -2+4t \\ 3 = 1+4t \\ 1 = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t = \frac{1}{2} \\ t = \frac{1}{2} \\ 1 = 1 \end{cases}$

Le système admet un solution, donc le point P appartient aussi à la droite d_3 : **les 3 droites sont concourantes au point $\boldsymbol{P(0;3;1)}$**

b) Les vecteurs directeurs sont : $\overrightarrow{u_1}\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$, $\overrightarrow{u_2}\begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ -4 \end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{u_3}\begin{pmatrix} 4 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix}$

On cherche a et b tels que $\overrightarrow{u_3} = a\overrightarrow{u_1} + b\overrightarrow{u_2} \Leftrightarrow \begin{cases} 4 = -a+2b \\ 4 = a-2b \\ 0 = -2a-4b \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 4 = 2b+2b \\ 4 = -2b-2b \\ a = -2b \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b = 1 \\ b = -1 \\ a = -2b \end{cases}$

Le système n'a pas de solution, les 3 vecteurs directeurs ne sont pas coplanaires : **donc les 3 droites ne sont pas coplanaires.**

Corrigé Exercice 13

La droite d passe par le point $\boldsymbol{A(1;1;-3)}$ et a comme vecteur directeur $\boldsymbol{\vec{u}(-m;1;1)}$ et la droite d' passe par le même point $\boldsymbol{B(-2m^2;2;0)}$ et a comme vecteur directeur $\boldsymbol{\vec{v}(-1;2;1)}$

On a $\frac{y_{\vec{u}}}{y_{\vec{v}}} = \frac{1}{2}$ et $\frac{z_{\vec{u}}}{z_{\vec{v}}} = 1$ donc $\frac{y_{\vec{u}}}{y_{\vec{v}}} \neq \frac{z_{\vec{u}}}{z_{\vec{v}}}$ Les vecteurs ne sont pas colinéaires, donc les droites sont soit sécantes, soit non coplanaires.

Pour savoir s'il y a un point commun aux deux droites, on essaie de résoudre $\begin{cases} 1-mt = -2m^2-t' \\ 1+t = 2+2t' \\ -3+t = t' \end{cases}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 1-mt = -2m^2-t' \\ t = 1+2t' \\ -3+(1+2t') = t' \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 1-mt = -2m^2-t' \\ t = 1+2\times 2 \\ t' = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 1-5m = -2m^2-2 \\ t = 5 \\ t' = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2m^2-5m+3 = 0 \\ t = 5 \\ t' = 2 \end{cases}$$

Pour qu'il y ait une solution, il faut que l'équation $2m^2-5m+3=0$ ait une solution.
$\Delta = 25-24 = 1 \Rightarrow \quad m_1 = \frac{5+1}{4} = \frac{3}{2}$ et $m_2 = 1$

Pour $\boldsymbol{m = \frac{3}{2}}$ et $\boldsymbol{m = 1}$ les droites sont sécantes, pour toutes les autres valeurs de $\boldsymbol{m}$ elles sont non coplanaires.

Corrigé Exercice 14

1) a) On a $\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = 2\vec{\imath}$: la droite (AB) est **parallèle à l'axe $(\boldsymbol{OI})$**.

b) On a $\overrightarrow{CD} = \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ 3 \end{pmatrix} = 4\vec{\jmath} + 3\vec{k}$ Donc les vecteurs $\overrightarrow{CD}, \vec{\jmath}$ et $\vec{k}$ sont coplanaires, donc la droite (CD) se trouve dans un plan $\mathcal{P}$ **parallèle à $(\boldsymbol{OJK})$**.

c) On a pour représentation paramétrique de (AB) : $\begin{cases} x = 2\boldsymbol{t} \\ y = \boldsymbol{-1} \\ z = \boldsymbol{5} \end{cases}$, $t \in \mathbb{R}$

Le plan $\mathcal{P}$ passant par C et dirigé par $\vec{\jmath}$ et $\vec{k}$ a pour équation paramétrée $\begin{cases} x = \boldsymbol{11} \\ y = \boldsymbol{a} \\ z = \boldsymbol{1+b} \end{cases}$, $a \in \mathbb{R}$ et $b \in \mathbb{R}$

Le point $E(11;-1;5)$ appartient clairement à la droite (AB) pour $t=\frac{11}{2}$ ainsi qu'au plan $\mathcal{P}$ pour $a=-1$ et $b=4$: c'est donc leur point d'intersection

d) Comme on sait que $(CD)\subset\mathcal{P}$, et que $E=(AB)\cap\mathcal{P}$, pour que les droites (AB) et (CD) soient sécantes, il faut qu'elles le soient au point E, donc il faut vérifier si $E\in(CD)$

On a $\overrightarrow{CE}=\begin{pmatrix}0\\-1\\4\end{pmatrix}$ et $\frac{y_{\overrightarrow{CE}}}{y_{\overrightarrow{CD}}}=-\frac{1}{4}$ $\quad et\quad$ $\frac{z_{\overrightarrow{CE}}}{z_{\overrightarrow{CD}}}=\frac{4}{3}\neq-\frac{1}{4}\Rightarrow$ Les vecteurs ne sont pas parallèles, donc les points C, D et E ne sont pas alignés. **Les droites (AB) et (CD) ne sont donc pas sécantes**

Autres méthodes possibles *: représentation paramétrique de (CD) :* $\begin{cases}x=11\\y=4t\\z=1+3t\end{cases}$, $t\in\mathbb{R}$ *… Et soit on vérifie si* $E\in(CD)$ *en remplaçant les coordonnées, soit on résout le système des deux représentations, et on ne doit pas trouver de solutions.*

2) a) $M_tN_t^2=(11-t)^2+\left(\frac{4}{5}t-(-1)\right)^2+\left(1+\frac{3}{5}t-5\right)^2$

$$=121-22t+t^2+\frac{16}{25}t^2+\frac{8}{5}t+1+16-\frac{24}{5}t+\frac{9}{25}t^2$$

$$=138+\left(-22+\frac{8}{5}-\frac{24}{5}\right)t+\left(1+\frac{16}{25}+\frac{9}{25}\right)t^2$$

$$=2t^2-25{,}2t+138$$ CQFD

b) Appelons f la fonction définie que $\mathbb{R}^+$ par $f(t)=2t^2-25{,}2t+138$

Il s'agit d'une fonction polynôme du 2nde degré, avec $t_0=-\frac{-25{,}2}{2\times2}=6{,}3$ et $f(t_0)=58{,}62$

On a donc le tableau de variation

t	0		$6{,}3$		$+\infty$
$f(t)$	138	↘	58,62	↗	$+\infty$

On a $f(t)=M_tN_t^2$

Mais comme la fonction racine carrée est strictement croissante, $\sqrt{f(t)}$ est minimale quand $f(t)$ l'est, c'est-à-dire pour $t_0=6{,}3$

Donc la longueur M_tN_t est minimale quand $t=6{,}3\ s$