

Corrections Savoir Ed.6

Corrigé Exercice 11

1)

Equation diff.	$y' = 4x$	$y' = \frac{1}{\sqrt{x}}$	$y' = \frac{1}{x^2}$
Ensemble des solutions	Une primitive de $4x$ est $2x^2$ donc $S = \{2x^2 + k : k \in \mathbb{R}\}$	Une primitive de $\frac{1}{\sqrt{x}}$ est : $2\sqrt{x}$ donc $S = \{2\sqrt{x} + k : k \in \mathbb{R}\}$	Une primitive de $\frac{1}{x^2}$ est : $-\frac{1}{x}$ donc $S = \left\{k - \frac{1}{x} : k \in \mathbb{R}\right\}$

Equation diff.	$y' = 4 + 6e^{-3x}$	$y' + 3x^2 = 0$ $\Leftrightarrow y' = -3x^2$	$y' + \frac{1}{x} = 0 \Leftrightarrow y' = -\frac{1}{x}$
Ensemble des solutions	Une primitive de $4 + 6e^{-3x}$ est : $4x - 2e^{-3x}$ donc $S = \{4x - 2e^{-3x} + k : k \in \mathbb{R}\}$	Une primitive de $-3x^2$ est : $-x^3$ donc $S = \{k - x^3 : k \in \mathbb{R}\}$	Une primitive de $-\frac{1}{x}$ est : $-\ln x$ donc $S = \{k - \ln x : k \in \mathbb{R}\}$

2) Solutions particulières

- a. Une primitive de $3x + 2$ est $3\frac{x^2}{2} + 2x$. Donc il existe $k \in \mathbb{R}$ tel que $f(x) = \frac{x^2}{2} + 2x + k$.
 On doit avoir : $f(1) = 0 \Rightarrow \frac{1}{2} + 2 + k = 0 \Rightarrow k = -\frac{5}{2}$.
 On a donc : $f(x) = \frac{x^2}{2} + 2x - \frac{5}{2}$
- b. Une primitive de $\frac{4}{x}$ est $4 \ln x$. Donc il existe $k \in \mathbb{R}$ tel que $g(x) = 4 \ln x + k$.
 On doit avoir : $g(e) = 3 \Rightarrow 4 \ln e + k = 3 \Rightarrow k = -1$.
 On a donc : $g(x) = 4 \ln x - 1$
- c. On a : $y' + 8e^{2x} = 2x \Leftrightarrow y' = 2x - 8e^{2x}$.
 Une primitive de $2x - 8e^{2x}$ est $x^2 - 4e^{2x}$. Donc il existe $k \in \mathbb{R}$ tel que $h(x) = x^2 - 4e^{2x} + k$.
 On doit avoir : $h(-1) = 5 \Rightarrow 1 - 4e^{-2} + k = 5 \Rightarrow k = 4 + 4e^{-2}$.
 On a donc : $h(x) = x^2 - 4e^{2x} + 4 + 4e^{-2}$

Corrigé Exercice 12

1. On a $v' = a = 3$ donc $v(t) = 3t + k$. Or $v(0) = 7 \Rightarrow 3 \times 0 + k = 7 \Rightarrow k = 7$.
 On a donc $v(t) = 3t + 7$.
2. a. La vitesse est la dérivée de la position, donc $x' = v$.
 L'équation différentielle est donc : $x' = 3t + 7$.
- b. Une primitive de $3t + 7$ est $\frac{3}{2}t^2 + 7t$. Les solutions de cette équation différentielle sont donc de la forme $x(t) = \frac{3}{2}t^2 + 7t + k'$. Or $x(0) = 5$ donc $k' = 5$.
 On a donc $x(t) = \frac{3}{2}t^2 + 7t + 5$.
- c. $x(10) = 1,5 \times 100 + 700 + 5 = 855$.

Corrigé Exercice 13

1)

Equation diff.	$y' = 4y$	$y' = -y$	$y' = \frac{y}{2}$
Ens. des solutions	$S = \{Ke^{4x} : K \in \mathbb{R}\}$	$S = \{Ke^{-x} : K \in \mathbb{R}\}$	$S = \{Ke^{x/2} : K \in \mathbb{R}\}$

Equation diff.	$2y' + 6y = 0 \Leftrightarrow y' = -3y$	$y - 3y' = 0 \Leftrightarrow y' = \frac{1}{3}y$
Ens. des solutions	$S = \{Ke^{-3x} : K \in \mathbb{R}\}$	$S = \{Ke^{x/3} : K \in \mathbb{R}\}$

Equation diff.	$(y')^2 - y^2 = 0 \Leftrightarrow (y' - y)(y' + y) = 0 \Leftrightarrow y' = y \text{ ou } y' = -y$
Ens. des solutions	$S = \{Ae^x ; Be^{-x} : A, B \in \mathbb{R}\}$

2) Solutions particulières

a. On doit avoir : $f(x) = Ke^{2x}$. Or $f(0) = 13 \Rightarrow K \times 1 = 13 \Rightarrow K = 13$. On a donc $f(x) = 13e^{2x}$.

b. On doit avoir : $g(x) = Ke^{-3x}$. Or $g\left(\frac{1}{3}\right) = -5 \Rightarrow Ke^{-1} = -5 \Rightarrow K = -5e$. On a donc $g(x) = -5e^{1-3x}$.

c. $(E) \Leftrightarrow y' = -\frac{1}{4}y$. On doit donc avoir : $h(x) = Ke^{-x/4}$.

Or $h(-8) = 7 \Rightarrow Ke^2 = 7 \Rightarrow K = 7e^{-2}$. On a donc $h(x) = 7e^{-2-x/4} = \frac{7}{e^{2+x/4}}$.