Corrections Savoirs SL. 6

Corrigé Exercice 12

$u_n = n^2\left(1 - \frac{1}{n} + \frac{1}{n^2}\right)$

Or $\lim\limits_{n\to+\infty}(n^2) = +\infty$ et $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(1 - \frac{1}{n} + \frac{1}{n^2}\right) = 1$

Donc par produit des limites, $\boldsymbol{\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty}$

$-2n^3 + n = n^3\left(-2 + \frac{1}{n^2}\right)$

Or $\lim\limits_{n\to+\infty}(n^3) = +\infty$ et $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(-2 + \frac{1}{n^2}\right) = -2$

Donc $\lim\limits_{n\to+\infty} n^3\left(-2 + \frac{1}{n^2}\right) = -\infty$

Et par quotient des limites, $\boldsymbol{\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = 0}$

$w_n = \frac{3n^2+5n-1}{2n+1} = \frac{n^2\left(3+\frac{5}{n}-\frac{1}{n^2}\right)}{n\left(2+\frac{1}{n}\right)} = \frac{n\left(3+\frac{5}{n}-\frac{1}{n^2}\right)}{2+\frac{1}{n}}$

Or $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(n\left(3 + \frac{5}{n} - \frac{1}{n^2}\right)\right) = +\infty$

et $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(2 + \frac{1}{n}\right) = 2$

Donc par quotient des limites, $\boldsymbol{\lim\limits_{n\to+\infty} w_n = +\infty}$

$y_n = 4^n - 2^n = 2^{2n} - 2^n = 2^n(2^n - 1)$

Or $\lim\limits_{n\to+\infty}(2^n) = +\infty$ et $\lim\limits_{n\to+\infty}(2^n - 1) = +\infty$

Donc par produit des limites, $\boldsymbol{\lim\limits_{n\to+\infty} y_n = +\infty}$

$z_n = 3 - \frac{2n^2-n}{1-3n^2} = 3 - \frac{n^2\left(2-\frac{1}{n}\right)}{n^2\left(\frac{1}{n^2}-3\right)} = 3 - \frac{2-\frac{1}{n}}{\frac{1}{n^2}-3}$

Or $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(2 - \frac{1}{n}\right) = 2$ et $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\frac{1}{n^2} - 3\right) = -3$

Donc par quotient des limites, $\boldsymbol{\lim\limits_{n\to+\infty} z_n} = 3 - \frac{2}{3} = \boldsymbol{\frac{7}{3}}$

$a_n = \frac{\sqrt{n}-1}{2n} = \frac{\sqrt{n}\left(1-\frac{1}{\sqrt{n}}\right)}{2n} = \frac{1-\frac{1}{\sqrt{n}}}{2\sqrt{n}}$

Or $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(1 - \frac{1}{\sqrt{n}}\right) = 1$ et $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(2\sqrt{n}\right) = +\infty$

Donc par quotient des limites, $\boldsymbol{\lim\limits_{n\to+\infty} a_n = 0}$

$c_n = \frac{1+2^n}{5^n} = \frac{2^n\left(\frac{1}{2^n}+1\right)}{5^n} = \left(\frac{2}{5}\right)^n \times \left(\frac{1}{2^n} + 1\right)$

Or $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\frac{2}{5}\right)^n = 0$ et $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\frac{1}{2^n} + 1\right) = 1$

Donc par produit des limites, $\boldsymbol{\lim\limits_{n\to+\infty} c_n = 0}$

$d_n = 3e^n - ne^n = (3-n)e^n$

Or $\lim\limits_{n\to+\infty}(3-n) = -\infty$ et $\lim\limits_{n\to+\infty}(e^n) = +\infty$

Donc par produit des limites, $\boldsymbol{\lim\limits_{n\to+\infty} d_n = -\infty}$

Un peu plus…

$x_n = \frac{2n-3}{n^2+6} = \frac{n\left(2-\frac{3}{n}\right)}{n^2\left(1+\frac{6}{n^2}\right)} = \frac{2-\frac{3}{n}}{n\left(1+\frac{6}{n^2}\right)}$

Or $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(2 - \frac{3}{n}\right) = 2$ et $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(n\left(1 + \frac{6}{n^2}\right)\right) = +\infty$

Donc par quotient des limites, $\boldsymbol{\lim\limits_{n\to+\infty} x_n = 0}$

$b_n = \frac{1+3^n}{2-5\times3^n} = \frac{3^n\left(1+\frac{1}{3^n}\right)}{3^n\left(-5+\frac{2}{3^n}\right)} = \frac{1+\frac{1}{3^n}}{-5+\frac{2}{3^n}}$

Or $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(1 + \frac{1}{3^n}\right) = 1$ et $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(-5 + \frac{2}{3^n}\right) = -5$

Donc par quotient des limites, $\boldsymbol{\lim\limits_{n\to+\infty} b_n = -\frac{1}{5}}$

$\varepsilon_n = 2^n - 6^n = 2^n\left(1 - \frac{6^n}{2^n}\right) = 2^n\left(1 - \left(\frac{6}{2}\right)^n\right)$

$\varepsilon_n = 2^n(1 - 3^n)$

Or $\lim\limits_{n\to+\infty}(2^n) = +\infty$ et on a $\lim\limits_{n\to+\infty}(1 - 3^n) = -\infty$

Donc par produit des limites, $\boldsymbol{\lim\limits_{n\to+\infty} \varepsilon_n = -\infty}$

$j_n = \left(\frac{2}{n}\right)^3 \times (n^2 + 1) = \frac{8n^2+8}{n^3} = \frac{\left(8+\frac{8}{n^2}\right)}{n}$

Or $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(8 + \frac{8}{n^2}\right) = 8$ et $\lim\limits_{n\to+\infty}(n) = +\infty$

Donc par produit des limites, $\boldsymbol{\lim\limits_{n\to+\infty} j_n = 0}$

Corrigé Exercice 13

n	Un
0	0
1	0,75
2	0,947368
3	0,989362
4	0,997868
5	0,999573
6	0,999915
7	0,999983
8	0,999997
9	0,999999
10	1
11	1

Exo A

1) La suite semble converger vers 1

2) $\boldsymbol{a}.$ $v_{n+1} = \dfrac{u_{n+1}-1}{u_{n+1}+3} = \dfrac{\frac{2u_n+3}{u_n+4}-1}{\frac{2u_n+3}{u_n+4}+3} = \dfrac{2u_n+3-u_n-4}{2u_n+3+3u_n+12} = \dfrac{u_n-1}{5u_n+15}$

$= \dfrac{1}{5} \times \dfrac{u_n-1}{u_n+3}$

Donc $v_{n+1} = \frac{1}{5}v_n$ la suite (v_n) est géométrique de raison $\frac{1}{5}$ et de 1er terme $v_0 = \frac{u_0-1}{u_0+3} = -\frac{1}{3}$

b. On a $v_n = v_0 \times q^n = -\frac{1}{3} \times \left(\frac{1}{5}\right)^n$

Comme $-1 < \frac{1}{5} < 1$, alors $\lim\limits_{n\to+\infty} \left(\frac{1}{5}\right)^n = 0$ et $\boldsymbol{\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = 0}$

c. $v_n = \frac{u_n-1}{u_n+3} \Leftrightarrow v_n(u_n+3) = u_n - 1$

$\Leftrightarrow v_n u_n - u_n = -1 - 3v_n \Leftrightarrow u_n(v_n - 1) = -1 - 3v_n$

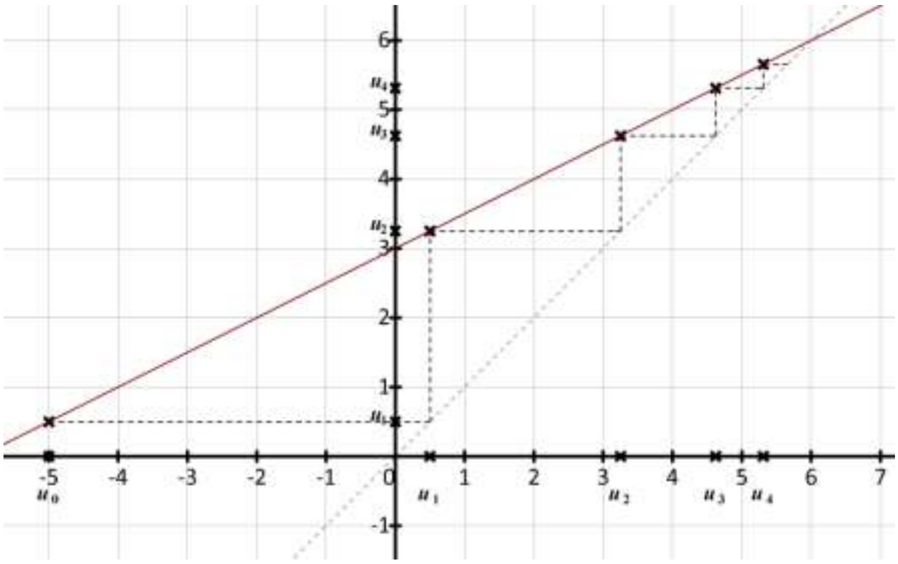
$\Leftrightarrow u_n = \frac{1+3v_n}{1-v_n}$

Or $\lim\limits_{n\to+\infty}(1+3v_n) = 1$ et $\lim\limits_{n\to+\infty}(1-v_n) = 1$ et par quotient des limites : $\boldsymbol{\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 1}$

Exo B

1) a. ⇒

b. La suite semble être **croissante et convergente vers 6**



2) a. $f(\alpha) = \alpha \Leftrightarrow \frac{1}{2}\alpha + 3 = \alpha$

$\Leftrightarrow \frac{1}{2}\alpha = 3 \Leftrightarrow \boldsymbol{\alpha = 6}$

b. C'est **l'abscisse et l'ordonnée du point d'intersection** de la courbe représentative de f avec la 1ère bissectrice, droite d'équation $y = x$

3) **a.** $v_{n+1} = u_{n+1} - 6 = \frac{1}{2}u_n + 3 - 6 = \frac{1}{2}(v_n+6) - 3 = \frac{1}{2}v_n + 3 - 3 = \boldsymbol{\frac{1}{2}v_n}$

(v_n) est bien une suite géométrique de raison $\frac{1}{2}$ et de premier terme $v_0 = u_0 - 6 = -11$

b) $v_n = v_0 \times q^n = \boldsymbol{-11} \times \left(\boldsymbol{\frac{1}{2}}\right)^{\boldsymbol{n}}$ et donc $u_n = v_n + 6 = \boldsymbol{6 - 11} \times \left(\boldsymbol{\frac{1}{2}}\right)^{\boldsymbol{n}}$

4) $u_{n+1} - u_n = \left(6 - 11 \times \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}\right) - \left(6 - 11 \times \left(\frac{1}{2}\right)^n\right) = -11 \times \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1} + 11 \times \left(\frac{1}{2}\right)^n$

$u_{n+1} - u_n = 11 \times \left(\frac{1}{2}\right)^n \times \left(-\frac{1}{2} + 1\right) = \frac{11}{2} \times \left(\frac{1}{2}\right)^n$ Donc, pour tout entier n, on a $u_{n+1} - u_n > 0$

La suite est croissante

Limite : On a $\lim\limits_{n\to+\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^n = 0$ car $-1 < \frac{1}{2} < 1$ donc par somme sur les limites, $\boldsymbol{\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 6}$